понедельник, 21 сентября 2020 г.

Задача 1. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P, такая что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Задача 2. Даны вещественные числа a, b, c, d, такие что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Задача 3. Имеется $4n$ камушков массами $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Каждый из камушков покрашен в один из n цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равного суммарного веса так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

вторник, 22. сентября 2020

Задача 4. Дано целое число $n > 1$. На горном склоне расположено n^2 фуникулёрных станций на разных высотах. Каждая из двух фуникулёрных компаний A и B владеет k подъёмниками. Каждый подъёмник осуществляет регулярный беспересадочный трансфер с одной из станций на другую, более высоко расположенную станцию. k трансферов компании A начинаются на k различных станциях; также они заканчиваются на k различных станциях; при этом трансфер, который начинается выше, и заканчивается выше. Те же условия выполнены для компании B. Будем говорить, что две станции *связаны* фуникулёрной компанией, если можно добраться из нижней станции в верхнюю, используя один или несколько трансферов данной компании (другие перемещения между станциями запрещены). Найдите наименьшее k, при котором заведомо найдутся две станции, связанные обеими компаниями.

Задача 5. Имеется $n > 1$ карточек, на каждой из которых написано целое положительное число. Оказалось, что для любых двух карточек среднее арифметическое написанных на них чисел равно среднему геометрическому чисел, написанных на карточках некоторого набора, состоящего из одной или более карточек. При каких n из этого следует, что все числа, написанные на карточках, равны?

Задача 6. Докажите, что существует положительная константа c, для которой выполняется следующее утверждение:

Пусть $\mathcal{S}$ — множество из $n > 1$ точек плоскости, в котором расстояние между любыми двумя точками не меньше 1. Тогда существует прямая ℓ, разделяющая множество $\mathcal{S}$, такая что расстояние от любой точки $\mathcal{S}$ до ℓ не меньше чем $cn^{-1/3}$.

(Прямая ℓ *разделяет* множество точек $\mathcal{S}$, если она пересекает некоторый отрезок, концы которого принадлежат $\mathcal{S}$.)

Замечание. Более слабые результаты с заменой $cn^{-1/3}$ на $cn^{-\alpha}$ могут оцениваться в зависимости от значения константы $\alpha > 1/3$.

Время на работу: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.