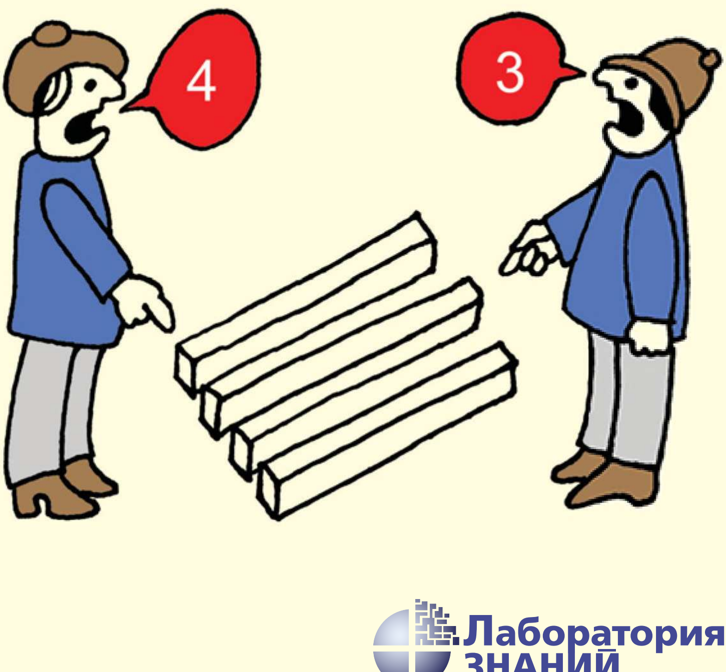
КРИСТОФ ДРЁССЕР

ОБОЛЬСТИТЬ ЛОГИКОЙ



Лаборатория ЗНАНИЙ

КРИСТОФ ДРЁССЕР

ОБОЛЬСТИТЬ ЛОГИКОЙ

Выводы на все случаи жизни

Перевод с немецкого
Н. Е. Асламова

6-е издание, электронное

Москва
Лаборатория знаний
2020

ОБОЛЬСТИТЬ ЛОГИКОЙ

CHRISTOPH DRÖSSER

Der Logikverführer

Schlussfolgerungen für alle Lebenslagen

Rowohlt Taschenbuch Verlag

УДК 501+001
ББК 22+72.3
Д73

Дрёссер К.

Д73 Обольстить логикой. Выводы на все случаи жизни / К. Дрёссер ; пер. с нем. Н. Е. Асламова. — 6-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 179 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-744-8

Эта книга полностью оправдывает свое название. Прочитав ее, вы поймете прелесть логического мышления и увидите, как логика помогает нам рассуждать и делать выводы даже в самых непростых жизненных ситуациях. В конце каждой главы читатель найдет лакомый кусочек — небольшую задачку. И о чем бы ни рассказывал автор — об устройстве компьютера или составлении библиотечного каталога, о соревновании Ахиллеса с черепахой или брадобрее, который никак не может побриться, — он показывает: логика может быть поистине обольстительной!

Дрёссер ставит перед собой довольно сложную задачу — с помощью забавных историй объяснить читателю идеи классической логики и новые открытия в науке, которая служит фундаментом всех точных наук. Автор решает эту задачу так блестяще, что все изложенное на страницах книги понятно и интересно и специалистам, и дилетантам.

УДК 501+001
ББК 22+72.3

Деривативное издание на основе печатного аналога: Обольстить логикой. Выводы на все случаи жизни / К. Дрёссер ; пер. с нем. Н. Е. Асламова. — 5-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2017. — 176 с. : ил. — ISBN 978-5-00101-044-9.

Издание содержит научную/научно-техническую/статистическую информацию. В соответствии с п. 2 статьи 1 Федерального закона от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ знак информационной продукции не ставится.

ISBN 978-5-00101-744-8

Оглавление

Предисловие

Истинно или ложно, действительно или недействительно, осмысленно или бессмысленно — такими вопросами мы задаемся каждый день. Логика является формально строгой сестрой математики и часто нам встречается. В качестве учения о принципах правильного мышления и последовательного доказательства она присутствует в философии и информатике. Но она подрывает математику не меньше, чем помогает ей.

От классической логики силлогизмов через более современные разработки, к примеру Джорджа Буля и Бертрана Рассела, от теории доказательств, теории множеств и теоретической информатики вплоть до нечеткой логики автор бестселлера Кристоф Дрёссер ведет нас в мир правильных умозаключений. В увлекательных и поучительных историях он непринужденно знакомит нас с основами, особенностями и ловушками логики. Дрёссер показывает, как наука может быть повседневной и как ученые приходили к своим открытиям раньше и теперь.

Конечно, в этой книге каждый найдет для себя лакомые задачки. Само собой разумеется, поклонники «Обольстить математикой» и здесь не останутся разочарованными.

Кристоф Дрёссер (родился в 1958 г.) редактирует научный раздел еженедельной газеты Die Zeit, для которой он в 1997 г. начал вести колонку «Stimmt's?». В 2005 г. Дрёссер получил награду «Научный журналист года». Помимо шести книг «Stimmt's?», Кристоф Дрёссер создал бестселлеры «Обольстить математикой», «Обольстить физикой» и «Обольстить музыкой» которые вышли в издательстве Rowohlt Taschenbuch Verlag.

Введение

Нелогичное никак нельзя поколебать логикой.

Хоймар фон Дитфурт, «Наследие неандертальца»

У логики плохой имидж. Ее считают холодной и расчетливой, и в массовой культуре частенько потешаются над персонажами, которые пытаются бороться с нелогичными сторонами жизни с помощью черно-белого формализма логических законов; вспомним хотя бы вулканца Спока[1] с корабля Enterprise.

Причина такого отношения в том, что логика сама не производит содержательных высказываний. Она только получает выводы из посылок, ничего не добавляя к смыслу. Можно ли назвать это пустой болтовней? В этой книге вы найдете формальные разборы некоторых предложений, глядя на которые, спросите: почему это нужно так сложно доказывать?

Так же недоумевают многие математики и философы. Логика как дисциплина, объединяющая оба этих предмета, на обоих факультетах прозябает. Студенты-философы не любят контрольные работы, когда нужно преобразовывать гротескных словесных чудовищ во что-то более удобоваримое, а математики часто воспринимают логику как чересчур утрированный формализм, который мешает им записывать результаты кратко, четко и изящно.

Но именно математики примерно сто лет назад открыли, что слишком небрежное отношение к логике действительно грозит потерей почвы под ногами. Математику неоднократно подрывали логические противоречия, и это длилось до тех пор, пока она снова не утверждалась на мало-мальски надежном фундаменте.

Хотя логика не добавляет ничего принципиально нового предложениям, к которым ее применяют, это не означает, что с ее помощью нельзя получить новые знания. Вновь математика служит замечательным примером: в том виде, как она существует сейчас, она выводит все свои положения из простых аксиом. Она

---

[1] Персонаж сериала «Звездный путь», родился на планете Вулкан. — *Прим. пер.*

не добавляет к этим незамысловатым первым посылкам ничего нового, всё уже с самого начала содержится в бесхитростных на первый взгляд положениях. Доказательство теоремы Ферма, гипотеза Пуанкаре — все сенсационные открытия последних лет, над которыми годами корпели гениальные умы, являются в конечном счете «всего лишь» прикладной логикой.

Но и нематематики поступают правильно, когда хотя бы в общих чертах знакомятся с законами логики. Они приучают нас к своего рода «ментальной гигиене», заставляют яснее формулировать свои мысли. В главе 3 я поместил 25 неправильных способов аргументации, ошибочных умозаключений, которые ежедневно встречаются нам в телевизионных шоу.

И конечно, логика — чудесный источник удовольствия от решения загадок. Я выбрал для вас три типа загадок: логикали, загадки про лжецов и про шляпы. Они отличаются тем, что их можно решить безо всяких специальных знаний, только силой логики. Я покажу примерные способы решения, а дальше вы сами сможете попробовать свои силы.

Я хотел бы поблагодарить Андреаса Лооса и Бернда Шу за проверку моей рукописи и некоторые важные содержательные дополнения, а также моего литагента Хайке Вильхельми и редактора Франка Штрикштрока из издательства Rowohlt. Если вы заметите логические неувязки или у вас появятся предложения, посетите мою страничку www.droesser.net!

Кристоф Дрёссер, Гамбург, сентябрь 2012 г.

Глава 1

Если Луна сделана из зеленого сыра,

или

О логике и действительности

Три логика приходят в бар.

— Всем пива? — спрашивает официантка.

— Я не знаю, — говорит первый.

— Я не знаю, — говорит второй.

— Да! — говорит третий.

Те, кто много занимаются логикой, считают этот анекдот невероятно смешным. Другие думают: «С такими людьми я бы в пивную не пошел!»

Логическое объяснение анекдота: первый логик хочет пива, но он не знает, чего хотят его спутники, поэтому он не может ответить на вопрос ни «да», ни «нет».

Второй логик может сделать вывод из ответа первого, что тот хочет пива, ведь первый логик не ответил на вопрос «нет» — предложение, которое начинается со слова «всем…», было бы ложным уже при единственном исключении. Второй логик тоже хочет пива, но он ничего не знает о желаниях третьего, поэтому ему тоже приходится ответить «Я не знаю».

Только третий логик может дать четкий ответ: оба его товарища хотели бы выпить пива, он сам тоже не прочь, поэтому он уверенно отвечает «Да!».

Добро пожаловать в страну изощренных каверз! Если вам доставил удовольствие ход мысли в этом анекдоте, то можете прямо сейчас заглянуть в главу 11 и решить ряд задач, в которых нужно рассуждать аналогичным образом. В реальной жизни такие ситуации, к счастью, встречаются редко: если официантка спрашивает клиентов, хотят ли все они пива, ответом будет не пожатие плечами, а многоголосое «Да!», «Конечно!», «А как же!». А затем просто подсчитают количество заказанного пива.

В жизни всё происходит не всегда логично, и это тоже хорошо. Иначе Гамлет не мог бы сказать «быть или не быть, вот в чем вопрос», ведь предложение вида «А или не А» всегда истинно и вообще не является вопросом. И когда певец и поэт Вольф Бирман, тогда еще в ГДР, свои внутренние противоречия выражал фразой «Я больше всего хотел бы быть далеко и охотно остаюсь здесь», он определенно отвергал тот факт, что его предложение имеет вид «А и не А», а потому содержит противоречие[1]. Жизнь вообще полна противоречий, и иногда к ним нужно относиться не так, как в логике.

Когда я несколько десятилетий назад изучал в университете математику и философию, логика была в списке обязательных предметов для философов и большинству из них внушала ужас. Непонимание достигло высшей точки, когда профессор, не моргнув глазом, продекламировал: «Если луна сделана из зеленого сыра, то число пять — пьяное». А затем он еще заявил, что предложение истинно, поскольку из неверной посылки может следовать неверный вывод, а все выражение в целом, несмотря на это, остается верным.

Возможно, издатель Франк Ширмахер, который наряду с германистикой и англоведением изучал и философию, прогулял эту лекцию, во всяком случае во время кульминации скандала вокруг бывшего президента Германии Кристиана Вульфа в начале 2012 г., он написал возмущенный комментарий в своей газете. Вульф попробовал в своем пресловутом телеинтервью опровергнуть выдвинутые против него упреки в получении личной выгоды и дать убедительные разъяснения своему поведению. Ширмахер не поверил ни единому слову из этих отговорок и написал: «Поскольку неверная посылка делает всё ложным, интервью президента стало провалом». Интервью действительно было провалом, но в логике ложные посылки делают всё не ложным, а истинным. «Если бы

---

1 Бирман сказал об этих строках на своем знаменитом кельнском концерте, который стал поводом для лишения его гражданства: «Они очень точно отражают политическое настроение многих молодых людей в ГДР».

не было словечка «если», был бы мой отец миллионером» (wenn das Wörtchen wenn nicht wäre, wäre mein Vater Millionär) — гласит немецкая поговорка, и к ней нечего добавить.

Но логическая импликация создает проблемы здоровому человеческому сознанию не только тогда, когда посылка ложная. Когда она верная, тоже появляются странные истинные положения: «Если Берлин — столица Германии, то Ангела Меркель — канцлер». Определенно, обе части высказывания верны, но каким образом они связаны между собой? Ответ — никак. В логике речь не идет о содержательной связи между высказываниями. Оборот «если…, то…» в повседневном языке обозначает причинную связь между фразами, но логика об этом ничего не знает (подробнее см. в гл. 2).

Мои сокурсники-математики тоже не очень активно интересовались логикой. В Бонне, где я учился, в математическом институте было отделение логики и изучения основ, располагавшееся в маленьком домике, арендованном институтом. Большинство студентов никогда не посещали этот дом. Математическая логика в XX в. уверенно расшатывала основы математики, а в конце концов показала, что не все ее истинные положения могут быть логически доказаны (см. гл. 8 и 10). Несмотря на это, математики в своей повседневной работе продолжают удивительно наивно обходиться с логикой. Они выучили пару способов доказательства, а в остальном применили здравый смысл, и при этом довольно далеко продвинулись.

Логика слепа по отношению к действительности. Она интересуется только формальной связью между высказываниями и выводами, которые можно получить из некоторого числа посылок, если те верны. Вотчина логики не индукция, т. е. выведение закономерностей из наблюдений за действительностью, а дедукция. Логика сама по себе не служит аргументом в дискуссии, но она может проверить обоснованность аргументации.

Поэтому логику часто упрекают в некоторой холодности. Вулканец Спок с корабля Enterprise был тонким аналитиком, абсолютно беспомощным в сфере эмоций. Однако именно это свойство логики великие мыслители прошлого считали преимуществом и мечтали о том, чтобы научиться с помощью холодной логики разрешать самые жгучие разногласия человечества. Готфрид Вильгельм Лейбниц родился за два года до окончания Тридцатилетней войны — конфликта, в ходе которого из-за разногласий в вопросах вероучения погибла почти половина населения страны. Лейбниц мечтал о том, что логика сможет занять место горячих словесных баталий. «Если бы возникли противоречия, нужды в спорах между двумя философами было бы не больше, чем между двумя счетоводами, — писал Лейбниц, — так как им было бы достаточно взять в руки карандаши, сесть за грифельные доски и сказать друг другу (если они хотят — при наличии доброжелательного свидетеля): давайте подсчитаем».

Ученые еще со времен Средневековья с помощью средств логики хотели дать ответы на предельные вопросы бытия. Не единожды предпринимались попытки вывести существование Бога из логических принципов посредством чистого размышления. Первым, кто сумел сделать это, был Ансельм Кентерберийский, живший в XI в. Его аргументация выглядела примерно так.

- Бог есть то, больше чего невозможно помыслить.
- Предположим, что Бог существует только в нашем сознании. Тогда можно будет помыслить нечто, что есть больше, чем то, больше чего невозможно помыслить[1].
- Допустим, можно помыслить нечто такое, что больше того, больше чего невозможно помыслить. Тогда то, больше чего невозможно помыслить, является тем, больше чего можно помыслить.
- Итак, то, больше чего невозможно помыслить, является тем, больше чего можно помыслить.
- Это противоречие. Таким образом, предположение, что Бог реально не существует, ложно, и Бог существует.

Эта аргументация сегодня кажется нам простенькой, допотопной и схоластической, в веру она никого не обратит. Из словесного оборота («то, больше чего невозможно помыслить») Ансельм выводит существование чего-то, что обладает указанным свойством. Нечто совершенно аналогичное произошло в математике в начале XX в.: разрешенное наивной теорией Кантора «множество всех

[1] Поскольку любой предмет, который существует и в нашем сознании, и в окружающей действительности, очевидно, больше, чем тот, который существует только в сознании. — *Прим. пер.*

множеств», которое не допускало чего-либо большего, чем оно само, — конструкция вроде Ансельмовой. Она ввергла математику в противоречия, как показал Бертран Рассел в 1903 г. Так возник первый серьезный кризис основ этой науки, воздвигнутой на чистой логике. Подробнее об этом в главе 8!

Лейбниц мечтал создать полное описание мироустройства, «characteristica universalis», представляющее собой энциклопедию безусловных истин, формальный язык для их описания и формулы для правил логического вывода, с помощью которых можно извлекать новые истины и прекратить все споры. Он был убежден, что такой проект группа ученых способна осилить за пять лет. Но Лейбниц умер до того, как смог начать это дело[1].

Идея Лейбница должна была потерпеть крах не только потому, что затраты были бы слишком велики. Есть и более глубокая причина: при помощи одной только логики нельзя получить все истины. Особенно это касается математики: в 1931 г. Курт Гёдель доказал, что каждая достаточно полная формальная система (о том, что это такое, идет речь в гл. 10) содержит истинные положения, которые невозможно доказать средствами логики. Это был уже второй тяжелый удар, полученный математикой за 30 лет.

Логика «содержательно нейтральна», она ничего не добавляет положениям, к которым ее применяют. Она только извлекает из них истины, которые уже изначально содержатся в этих положениях. В конце концов логика производит только тавтологии — положения, истинные независимо от их содержания. Насколько это много, показывает математика: все ее выводы являются в конечном счете тавтологиями, т. е. выводами из аксиом. Вот каким мощным инструментом может быть логика.

---

[1] Если мечта Лейбница сегодня нам кажется смешной, то мы ее слишком упрощаем. В более позднее время предпринимались аналогичные попытки: например, проект «Сайк» американского информатика Дугласа Лената, который должен был наделить компьютер полным человеческим повседневным знанием. Сюда включались в том числе и элементы формулы для поиска истин, характерные для здорового человеческого ума, формальный язык для их описания и правила логического вывода из логики предикатов. Проект стартовал в 1984 г., и Ленат оценивал расходы на его осуществление в 350 человеко-лет. На сегодняшний день проект не закончен, имеется лишь пара модулей знания для специальных областей применения.

Я приглашаю вас в путешествие по миру логики; путешествие, во время которого нам встретятся задачки и головоломки, хорошие и плохие аргументы, противоречия и парадоксы; путешествие, которое в итоге покажет нам границы человеческого мышления.

Есть другой вариант анекдота, который я рассказал в начале главы.

Четыре логика приходят в бар.

— Всем пива? — спрашивает официантка.

— Я не знаю, — говорит первый.

— Я не знаю, — говорит второй.

— Я не знаю, — говорит третий.

— Нет! — говорит четвертый.

— Ах, вы, наверное, логики? — смеется официантка. — Тогда я принесу ваши три пива!

— Да, — говорит четвертый логик. — А мне, пожалуйста, бокал красного вина.

Глава 2

Правда и ложь,
или
Когда грабители спотыкаются о логику

— День начинается неплохо, — думал комиссар Детлеф Бенке. Через открытую дверь кабинета он бросил взгляд в коридор, где сидели трое подозреваемых: Арнольд Зегемайстер (по прозвищу Арни), Бодо Кюммерлинг (известный как Бомбо-Бодо) и Кристиан Вюргер (он же Сейф-Крис). Все трое уже подверглись персональным допросам и, по-видимому, были довольны результатом: во всяком случае они явно пребывали в хорошем настроении, Арни даже хлопал себя по бедру. Для позитива у них были все основания; если комиссару в скором времени не придет в голову хорошая идея, он должен будет отпустить всех троих.

Он был уверен, что по крайней мере один из троих виновен в ограблении, которое вчера стало главной темой для разговоров в Кляйнштадте. В ночь с понедельника на вторник кто-то профессионально взломал дверь местного филиала сберкассы. Воры вывели из строя сигнализацию, а затем кислородным копьем разрезали несгораемый шкаф и забрали 20 000 евро наличными. Они точно знали, где и как надо применять свои инструменты, — наверняка поработали профессионалы. Или это был один-единственный вор? Никаких отпечатков пальцев, никаких свидетелей — предстояло долгое расследованием с сомнительными перспективами успеха. Это было первое дело Бенке в отделе ограблений; его перевели сюда пару недель назад после 20 лет работы по расследованию убийств[1]. — Я достаточно насмотрелся на трупы, — объяснил он свой уход начальнику. Быстрое раскрытие сенсацион-

---

[1] См. «Убийца на бензозаправке» в «Обольстить математикой» и «Культ квантов» в «Обольстить физикой».

ного ограбления было бы действительно хорошим вступлением в должность.

А вчера произошло вот что: в комиссариат пришла эта пожилая дама, фрау Майстер, лет примерно 75, немного прихрамывающая и явно возбужденная. Она рассказала, что случилось с ней на этой неделе: она ела вареную колбасу в «Колбасной тележке Вольфганга», а рядом у столика стояли трое мужчин, которых она немного побаивалась. Она отодвинулась, но все еще могла слышать обрывки разговора: «сберкасса», «в понедельник ночью», «кислородное копье». Последнее выражение она запомнила особенно хорошо, поскольку никогда его раньше не слышала. Когда все заговорили о взломе, она вновь вспомнила об этом случае и отправилась прямиком в полицию.

Бенке был воодушевлен этим рассказом свидетельницы. Найти в полицейской базе данных фотографии подходящих под описание преступников и показать их фрау Майстер было минутным делом. И та была совершенно уверена, что Арни, Бодо и Крис и были теми тремя людьми, которых она подслушала в закусочной. Очная ставка убедила бы любого судью, в этом Бенке не сомневался.

Сегодняшнее задержание троих предполагаемых грабителей не стало сюжетом для кино — полиция всех застала дома, и они добровольно согласились отправиться в участок.

Там ассистент Бенке Оливер Хуфнагель внимательно следил за тем, чтобы трое подозреваемых не общались друг с другом и не согласовали версии. Подозреваемых по одному приводили в комнату для допросов. Что удивительно, после того как им были предъявлены показания фрау Майстер, все трое решили ответить на вопросы по этому делу, хотя могли бы отказаться, ведь это было бы для них лучшим решением.

Арнольда Зегемайстера допрашивали первым.

— Мы совершенно случайно встретились в закусочной, — заявил он. — Мы знакомы еще с последнего заключения и поэтому решили немного поболтать, — так сказать, разговор на профессиональные темы о деле, которое для меня было далеким прошлым. Но Бодо и Крис явно видели для себя какое-то будущее в нашем ремесле, — продолжал Арни. — Во всяком случае они рассказывали, как легко можно отключить сигнализацию в сберкассе и что корпус сейфа не доставил бы хлопот. — Потом снова ушли от темы, но у Арни не было сомнений в том, что Бодо и Кристиан нацелились на филиал сберкассы.

Следующим допрашивали Бодо. Он тоже сказал, что встреча в закусочной не была запланированной, он был рад снова увидеть сотоварищей. Сам он сейчас ведет совершенно честную, скромную жизнь, но Арни четко дал понять, что предпочел бы заслуженной тяжким трудом зарплате подсобного рабочего быстрые денежки от ограбления банка. Арни рассказывал двум другим о своих планах относительно сберкассы. — Он даже пригласил нас присоединиться за треть от добычи, но Крису и мне это дело показалось сомнительным, у нас обоих не было желания снова провести пару лет за решеткой.

Показания Криса были весьма похожи на те, которые дал Арни, почти дословно совпадали, только имена были переставлены. Арни и Бодо уже до встречи имели разработанный план ограбления, они не раз спрашивали Криса, хочет ли он присоединиться, но явно не хотели делиться с ним деньгами. Но он твердо отклонил предложение, потому что ему была слишком важна скромная жизнь на свободе.

Три рассказа, три различные версии. Каждый обвиняет одного или нескольких друзей. «Воровская честь немного сегодня стоит, — подумал Бенке. — Или они заранее договорились? Что если они с самого начала договорились дать три противоречивые версии показаний, а потом, усмехаясь, смотреть, как полиция пытается их изобличить?»

— Хуфнагель, зайдите ко мне! — проревел Бенке в соседнюю комнату. Ассистент записал все показания, и комиссар хотел узнать его мнение, что делать дальше. В последние годы юный подчиненный из сорвиголовы, насмотревшегося фильмов про закон и порядок, превратился в полицейского, который думает головой, а не делает скороспелые выводы. Возможно, ему что-то пришло в голову насчет этого дела.

Хуфнагель появился в комнате Бенке, держа в руке блокнот в клеточку. Его глаза светились — неужели допросы навели его на горячий след?

— Шеф, есть! — выпалил Хуфнагель, не успев сесть. — Вы же мне всегда внушали, что нужно хотя бы разок включить мозги, прежде чем сдаваться!

— Ну да, я так говорил. И это помогло в нашем деле?

— Да! Посмотрите, я изобразил на схеме показания всех троих.

Бенке непонимающе взглянул на листок, который больше напоминал кроссворд, нежели протокол допроса.

— Если мы будем исходить из того, что виновный врет, а невиновный говорит правду, — продолжал Хуфнагель, — то Бодо мы можем арестовать прямо сейчас.

— Неужели? Это ты должен мне разъяснить..., — озадаченно ответил Бенке. Но после пары фраз Хуфнагеля он совершенно с ним согласился. — А Бодо был один или у него имелся подельник?

— Он ни в коем случае не мог быть один, — сказал ассистент. — Но мы еще не можем уверенно сказать, вместе с кем он провернул дело. Я предлагаю допросить его еще раз, сообщив о нашем результате, — возможно, тогда он расколется и все нам расскажет!

Итак, Бодо Кюммерлинга вновь пригласили в комнату для допросов. Бенке держался совершенно спокойно, Хуфнагель вел допрос. Он положил перед подозреваемым свои выкладки и заявил, что у Бодо нет выхода. Бенке чуть не рассмеялся, когда увидел, как Бодо, который во взрывчатых веществах разбирался лучше, чем в логике, напрягался, не поспевая за ходом мысли юного комиссара. Но в конце концов он понял, что попал в оборот из-за своих подельников, и решил дать обратный ход. — Но я это сделал не один! — заявил Бодо плаксивым тоном.

— Это мы уже знаем, — ответил Хуфнагель. — Выкладывайте, кто был с вами. Арни сказал правду или Крис?

— Правду? Ее не сказал ни тот, ни другой. — Бодо ухмыльнулся.

Теперь озадаченным стало лицо Оливера Хуфнагеля. Но зато догадался Детлеф Бенке. — Это же ясно, вы упустили один из возможных вариантов. — Он подозвал из коридора конвоира. — Дежурный, не отпускайте двух других домой, мы пока подержим всех троих здесь. Если меня не подводит логика, они вместе совершили преступление!

Правда и ничего кроме правды

Что написал ассистент Хуфнагель в своем блокноте? Он свел высказывания троих обвиняемых к логическому ядру и проанализировал его с помощью таблицы. Прежде чем ее воспроизвести, мы непременно должны сделать небольшое отступление и заняться основами пропозициональной логики, она же логика высказываний.

Это самая простая логическая система, с ее помощью уже можно правильно кодировать высказывания. Так называют, как правило, полные предложения, которые являются либо истинными, либо ложными: «Берлин — столица Германии», «в следующий понедельник пойдет дождь», «эльфы и тролли существуют». Логику высказываний применяют и к тем предложениям, истинность которых невозможно установить (поскольку высказывание касается события в будущем, как во втором примере, или его нельзя точно проверить, как в третьей фразе). К высказываниям не относятся приказы («Ешь ужин!») и вопросы («Ты всегда будешь меня любить?»). Простое эмпирическое правило: если перед предложением можно поставить фразу «следующее предложение верно» и все вместе имеет смысл, речь идет о высказывании.

Ограничение двумя истинностными значениями — важнейший признак логики высказываний, именно благодаря ему она становится очень наглядной. В повседневной жизни мы не всегда стремимся смотреть на мир в черно-белом свете. Фраза «HSV — первоклассный футбольный клуб» хорошо укладывается в логику истинно/ложно, если «первоклассный» определить как «играющий в высшей лиге». Если же, напротив, речь идет об оценке мастерства команды, то люди не всегда решатся дать ей определение «первоклассный» и, возможно, после посредственной игры скажут, что это предложение верно только наполовину. О таких «многозначных» вариантах логики речь пойдет в гл. 13.

В пропозициональной логике высказывания не разбирают на составные части, как единое целое их чаще всего обозначают заглавными буквами (A, B, C…). Новые высказывания получают, соединяя имеющиеся при помощи логических операторов.

Очень важен оператор НЕ — он обращает всякое высказывание в его противоположность. Так из предложения «завтра пойдет дождь» получается «завтра не пойдет дождь». Если обозначить высказывание переменной A, то вместо НЕ A можно писать $\neg A$, а еще можно составить так называемую истинностную таблицу, которая описывает истинностные значения $\neg A$:

A	$\neg A$
и	л
л	и

Обозначения «и» и «л» являются сокращениями для «истинно» и «ложно», а вся таблица читается следующим образом: $\neg A$ ложно, если A истинно, и истинно, если A ложно.

Еще интереснее, когда друг с другом связаны два высказывания. Для этого имеются (среди прочего) операторы И; ИЛИ; ЕСЛИ..., ТО (импликация или следование); ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА (равносильность). Значение этих операторов вполне можно определить с помощью таблиц истинности. Поскольку для двух высказываний имеется четыре комбинации значений «истинно» и «ложно», чтобы описать любой оператор, хватит четырех строк. Например оператор И, который отображается значком $\wedge$, похожим на крышу:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Оператор делает именно то, что мы от него ожидаем: выражение «A И B» истинно только в том случае, если обе части истинны, в остальных трех случаях оно ложно.

Оператор ИЛИ, который обозначается символом $\vee$, имеет следующую таблицу истинности:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

В обыденной речи мы используем два вида «или». С одной стороны, есть так называемое исключающее «или»: «на обед есть рис или макароны» — большинство воспримет это предложение в том смысле, что есть *либо* рис, *либо* макароны, но не оба гарнира сразу. С другой стороны, предложение «завтра может пойти дождь или снег», наоборот, не исключает возможность для одновременной реализации обоих вариантов: например, с утра начнется дождь, который позже перейдет в снег. В логике почти всегда применяется неисключающее «или», которое дает истинное высказывание только в том случае, если хотя бы одна часть высказывания истинна.

Как уже было сказано в гл. 1, наибольшие трудности студентам доставляет импликация, то есть оператор ЕСЛИ..., ТО. Связь «если…, то…» в обыденной речи выражает содержательную связь между обеими частями высказывания, иногда даже отношение причинности: «Если идет дождь, то на улице будет сыро». Но в логике речь идет лишь о совершенно формальной связи, полностью абстрагированной от содержания обеих частей высказывания. Импликация определяется следующим образом:

A	B	$A \to B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Лучше всего ее описать двумя условиями: из истинной посылки не может следовать ничего ложного, а из ложной может следовать все что угодно.

Вот хитроумный пример: что можно сказать о предложении «из НЕ A следует A»? Для ответа надо быстренько составить таблицу и заполнить две строки:

A	$\neg A$	$\neg A \to A$
и	л	и
л	и	л

Теперь видно, что предложение «Если Кристиан Вульф не является президентом, то Кристиан Вульф — президент» в то время, когда он занимал эту должность, было истинным, а сегодня оно ложно. С ума сойти, правда?

Оператор ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА, наоборот, — один из тех, которые довольно точно используются в повседневном обиходе. Нужно только разъяснить некоторые мысли по поводу связи высказываний *A* и *B*: логику эта связь не волнует, ее интересуют только истинностные значения. Высказывание «*A* ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА *B*» истинно, если *A* и *B* имеют одинаковые значения, и ложно в двух других случаях.

A	B	$A \leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Есть ли еще логические операторы? Для оператора, связывающего две части высказывания, возможно составить 16 различных истинностных таблиц, соответственно, всего можно выделить 16 операторов. Но так много не нужно, поскольку их все можно представить как комбинации уже названных операторов. И даже они нужны не все, например высказывание «ЕСЛИ *A*, ТО *B*» также можно представить как «*B* ИЛИ НЕ *A*». Пусть это будет первым утверждением, которое мы докажем логически. Давайте составим истинностную таблицу для «*B* ИЛИ НЕ *A*»:

A	B	$\neg A$	$B \vee \neg A$
и	и	л	и
и	л	л	л
л	и	и	и
л	л	и	и

Это точно такая же таблица, как и в определении импликации. Еще это выражение можно записать как «*B* истинно, или *A* ложно, или оба ложны».

Легко показать, что все логические операторы представляют собой комбинации из НЕ и ИЛИ. И редукцию можно продолжить дальше. Для этого используется новый оператор НЕ И, который обозначается вертикальной чертой: |. С его помощью можно получить вообще все другие операторы, включая НЕ! НЕ И (его иногда обозначают NAND, то есть *not and*) является именно тем, чем называется: высказывание «НЕ A И B» — полная противоположность высказыванию «A И B» — является ложным только тогда, когда и A, и B истинны. В виде таблицы НЕ И задается так:

A	B	$A \mid B$
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	и

Все другие операторы выражаются через НЕ И:

$\neg A$ соответствует $A \mid A$

$A \wedge B$ соответствует $(A \mid B) \mid (A \mid B)$

$A \vee B$ соответствует $(A \mid A) \mid (B \mid B)$

$A \rightarrow B$ соответствует $A \mid (A \mid B)$

$A \leftrightarrow B$ соответствует $(A \mid B) \mid ((A \mid A) \mid (B \mid B))$

Если у вас голова идет кругом, попробуйте успокоиться и составить пару истинностных таблиц!

Насколько важен оператор НЕ И в теоретическом плане, настолько же он бесполезен на практике. НЕ И-высказывания будут просто-напросто слишком длинными. Возьмем, к примеру, высказывание «Если идет дождь, то я всегда выхожу из дома с зонтиком». Давайте обозначим «идет дождь» как R, «я выхожу из дома» как H, а «беру с собой зонтик» как S. Тогда предложение можно записать в виде

$$R \rightarrow (H \rightarrow S).$$

Это вполне наглядная логическая формула. С вертикальными чертами она выглядела бы так:

$$R \mid (R \mid (H \mid (H \mid S))).$$

Тут уже нужно считать, сколько именно поставлено правых и левых скобок! А интуитивно смысл предложения не понять.

Теперь вернемся к ограблению банка: что Хуфнагель написал на листочке? Он составил полную таблицу для трех высказываний: «Арни участвовал в ограблении», «Бодо участвовал в ограблении», «Крис участвовал в ограблении», обозначив эти высказывания A, B и C. Существует восемь возможных комбинаций истинностных значений (см. таблицу ниже).

Как выразить три высказывания троих ранее судимых граждан? Каждый из них утверждал, что он сам невиновен, а затем обвинял одного или двух своих товарищей.

Высказывание Арни[1]: $\neg A \wedge B \wedge C$.

Высказывание Бодо: $\neg B \wedge A \wedge \neg C$.

Высказывание Криса: $\neg C \wedge A \wedge B$.

Что означает последняя колонка таблицы, обозначенная Хуфнагелем как «Согласуется»? В ней отражена согласованность с предположением, которое помощник положил в основу своих рассуждений, а именно: каждый виновный лжет, каждый невиновный говорит правду. То есть истинностное значение высказывания Арни должно быть прямо противоположно значению высказывания A, то же самое касается высказываний Бодо и Криса. Если проверить все строки в таблице, то окажется, что только в трех это правило выполняется. Эти три строки выделены, и в каждой из них высказывание B имеет истинностное значение «и» — таким образом Хуфнагель делает безупречный вывод, что Бодо в любом случае участвовал в ограблении банка.

A	B	C	Арни	Бодо	Крис	Согласуется?
			$\neg A \wedge B \wedge C$	$\neg B \wedge A \wedge \neg C$	$\neg C \wedge A \wedge B$	
и	и	и	л	л	л	да
и	и	л	л	л	и	да
и	л	и	л	л	л	нет
л	и	и	и	л	л	да
и	л	л	л	и	л	нет
л	и	л	л	л	л	нет
л	л	и	л	л	л	нет
л	л	л	л	л	л	нет

[1] Собственно, здесь нужно было бы добавить скобки: $\neg A \wedge (B \wedge C)$, поскольку операторы строго определены только для двух высказываний. Но в трехчленном высказывании с оператором И или ИЛИ можно расставлять скобки как угодно, поэтому их можно опустить.

Вторая и третья выделенные строки соответствуют высказываниям Арни и Криса, что ограбление совершили двое других. Но теперь Бодо допрашивают повторно, и он говорит (в этот раз правдиво, поскольку у него нет больше причин лгать), что не только его первоначальное высказывание было ложью, но и высказывания Арни и Криса тоже. В этом случае подходит только первая выделенная строка: все трое участвовали в ограблении, а их утверждения были ложными.

Если вы самостоятельно хотите порешать такие задачи, в которых надо определить, правду говорят или нет, то отправляйтесь в гл. 7, на Мендачино, остров лжецов!

Глава 3

У Супермена плохие шансы,
или
Об аргументах хороших и не очень

Все смешалось в доме Вортманнов: госпожа Вортманн отправилась на важную встречу инициативной группы матерей, каждый день наблюдающих за питанием детей в школьном буфете, а с ребенком остался Маттиас Вортманн[1].

Его десятилетний сын Леон ходит в гимназию, и роли в семье четко распределены: независимый инвестиционный консультант организовал офис в собственной огромной квартире, и по восемь часов в день он не желает, чтобы ему мешали — в конце концов он заботится о неизменно высоком уровне жизни семьи. Его жена ухаживает за сыном, занимается делами по дому и «возней», как Вортманн иногда скептически называет инициативы своей жены за пределами семьи. Сегодня как раз один из таких дней «возни», и Маттиас Вортманн вынужденно согласился присмотреть за Леоном во второй половине дня.

От папы при этом не требуется больших усилий. Раньше он еще должен был сидеть на неудобном пластиковом стуле или на полу и играть с Леоном, а это чаще всего было смертельно скучно. Теперь сын уже достаточно самостоятелен, чтобы чем-нибудь себя занять. Он делает уроки, читает или сидит за компьютером (да и какая, собственно, Вортманну-страшему разница?).

Итак, отец сидит в своем офисе перед компьютером и работает со сложными таблицами в Excel, а сын лежит на полу в своей комнате и листает комикс. Двери в коридор открыты, чтобы отец и сын могли друг друга слышать.

---

[1] Некоторые читатели знакомы с семьей Вортманнов по истории «В детской» из «Обольстить физикой» (БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014).

— Пап? — доносится из детской комнаты.

— М-м? — отвечает Вортманн. Щелк-щелк-щелк — стучат пальцы по клавиатуре.

— Можно у тебя кое-что спросить?

Почему ребенок всегда спрашивает, можно ли ему спросить? — Конечно, сын! — Щелк-щелк-щелк.

— Супермен существует?

Вортманн медлит с ответом. Что надо на это сказать? Леон ведь еще верит в Деда Мороза. Вдруг его постигнет глубокое разочарование, если он услышит «нет»?

— Конечно, Супермен существует, — наконец отвечает Вортманн.

На некоторое время воцаряется тишина; слышно только щелканье клавиш и шелест страниц.

— Если Супермен в состоянии предотвратить зло, — внезапно спрашивает Леон, — и он этого хочет, то он предотвращает, правда?

— Конечно, — говорит отец. — Ты постоянно читаешь истории о том, как Супермен спасает мир.

— А если бы он не мог предотвратить зло, то он был бы не всемогущим, верно? — настаивает Леон.

— Правильно, — отвечает Вортманн. Там что-то было с этим криптонитом, который может ослаблять супергероя… Но, видимо, тот способен всегда выкручиваться из ситуаций, когда теряет силу.

— А если Супермен не хотел бы предотвращать зло, то сам был бы злом, так ведь?

Да что малыш вообще хочет? Вортманн начинает понемногу терять терпение. — Конечно, Супермен ведь положительный герой, поэтому он хочет предотвратить зло.

Щелк-щелк-щелк. Перелистывание. Пару минут спустя:

— Но Супермен не предотвращает зло. Ведь есть этот Лекс Лютор, который постоянно совершает ужаснейшие преступления, — доносится из детской.

— Да, правильно, — ворчит отец, — если бы этого не было, истории были бы скучными. Всегда должен быть злой антигерой, это только делает сюжет увлекательнее. — Вроде это объяснение должно сойти.

— Но если Супермен действительно существует, то он определенно не злой и совершенно точно не невсемогущий, — говорит Леон.

— Ты прав, Супермен же хороший, и у него есть суперспособности.

Вновь воцаряется тишина. Вортманн может беспрепятственно производить свои «щелк-щелк-щелк» и заполнять таблицу на экране цифрами и процентными ставками. Вдруг Леон оказывается у дверей его офиса — это почти оскорбление, ведь офис — это святая святых, сюда может ступать только сам Вортманн.

— Папа, но ты сейчас сам себе противоречишь, — победно улыбается сын.

— Я себе противоречу? Как так? Я утверждал только то, что каждый знает о Супермене.

— Может быть, — говорит Леон, — но из всего того, что ты сказал, логически следует, что Супермен не может существовать.

— Логически?

— Логически.

— Это ты мне должен разъяснить.

Сын показывает отцу список, который выглядит совершенно так же, как таблица в Excel. И после небольшой паузы Вортманн понимает, что логика сына безупречна и неопровержима. При таких исходных посылках Супермен действительно не может существовать.

— Браво! — радуется Вортманн, горячо надеясь, что его логически мыслящий отпрыск не применит на следующей неделе эти аргументы к истории о Боженьке.

Хороший вывод

Опасения Вортманна-старшего, конечно, обоснованны: выкладки Леона представляют собой не что иное, как логическое рассмотрение вопроса, существует ли Бог, если Он допустил в мир зло, только Бог заменен на Супермена. Философы и богословы с давних времен называют «теодицеей» такие исследования, которые призваны примирить несовершенство мира и идею благого Бога.

С помощью логической аргументации пытаются убедительно доказать, что из определенного количества исходных посылок следует точное высказывание. Классическая логика располагает полным набором правил логического вывода, а доказательство состоит в том, чтобы преобразовывать исходные посылки по элементарным правилам до тех пор, пока наконец не появится однозначное следствие.

Два самых древних из этих правил — это утверждающий модус (modus ponens) и отрицающий модус (modus tollens), которыми оперировали еще древние греки. Утверждающий модус гласит: если из высказывания A следует высказывание B и при этом A верно, то и B верно. Пример:

Если идет дождь, на улице сыро.

Идет дождь.

Значит, на улице сыро.

Утверждающий модус можно записать следующим образом:

$$A \rightarrow B, A : B$$

Посылки отделяются запятыми, а после двоеточия стоит следствие.

Отрицающий модус тесно связан с утверждающим. Формально его можно записать так:

$$A \rightarrow B, \neg B : \neg A$$

Пример:

Если идет дождь, на улице сыро.

На улице не сыро.

Значит, дождь не идет.

Оба правила не просто очевидны для каждого мыслящего человека, их можно быстро проверить при помощи истинностной таблицы. Тогда сразу будет видно, что всякий раз, если обе посылки верны, следствие тоже будет верным — для всех возможных комбинаций истинностных значений A и B.

Для чего тогда используются правила логического вывода? На этот вопрос есть два ответа: практический и фундаментальный. Практический состоит в том, что проверка рассуждений при помощи таблиц истинности становится тем более трудоемкой, чем больше высказываний содержится в одном выражении. В аргументации Леона по поводу Супермена, как мы увидим, содержится шесть высказываний, а число возможных раскладов с использованием истинностных значений «и» и «л» равно 2^6, то есть 64.

Но есть еще фундаментальный ответ: использование истинностных таблиц — это *семантическое* доказательство правильности утверждения. Поэтому истинность или ложность высказывания — тоже семантическая, ведь учитывается его конкретное содержание. Доказательство посредством правил логического вывода, напротив, является *синтаксическим*, потому что оно только преобразует высказывание без учета его истинностного значения. Это доказательство основано только на манипуляции с логическими символами и не имеет отношения к истинности или ложности.

Логика высказываний — это простая система, в которой все семантически истинные положения также можно доказать синтаксически. Можно еще сказать, что система *полна*.

Уже здесь важно провести различие между *истинностью* и *доказуемостью*. Формальная система состоит из 1) исчисления, то есть абстрагированных от содержания правил манипуляции с символами, и 2) интерпретации этих символов, то есть содержательного истолкования, в данном случае — распределения на истинные и ложные высказывания. Одна и та же система может получить множество интерпретаций. *Истинным* является то предложение, которое подходит к соответствующей интерпретации системы. Предложение *доказуемо*, если оно синтаксически шаг за шагом вытекает из строго определенных аксиом и правил логического вывода. Как было сказано, в логике высказываний истинность и доказуемость совпадают, и вплоть до последних десятилетий математики тоже думали, что в их науке все истинные положения являются доказуемыми. В гл. 10 мы увидим, что Курт Гёдель избавил их от этой иллюзии раз и навсегда.

Формально корректное логическое доказательство действительно включает на каждом шаге рассуждений только положения из набора исходных посылок или высказывания, выводимые из них посредством применения нескольких правил преобразования и логического вывода. В каждой строке дано то, что следует из предыдущих, а столь любимые математиками фразочки вроде «как легко можно увидеть» запрещены.

Прежде чем мы возьмемся за историю о Супермене, приведу только один простой пример. Нужно доказать следующее утверждение:

$$A \to B, \neg A \to C, \neg B : C.$$

Пример интерпретации для этой схемы логического вывода: «Если я съел все дочиста из своей тарелки, то наступает хорошая погода. Если я что-то не доел, то моя мама ругается. На улице плохая погода. Поэтому моя мама ругается». Логично или нет?

Чтобы формально доказать это утверждение, прежде всего надо записать и пронумеровать все исходные посылки:

1. $A \to B$.
2. $\neg A \to C$.
3. $\neg B$.

Затем посредством применения правил преобразования и логического вывода производят новые положения для того, чтобы где-нибудь обнаружить вывод, т.е. C.

4. $\neg A$ (1, 3 MT).

В скобках всегда указывается, из каких предыдущих положений и с помощью какого правила создано новое положение. В данном случае из положений 1 и 3, то есть исходных посылок $A \to B$ и $\neg B$, с применением modus tollens сделан вывод НЕ A. На человеческом языке этот вывод проходит так: «Если я съел все дочиста из своей тарелки, то наступает хорошая погода. На улице плохая погода. Значит, я что-то не доел».

Остался последний шаг:

5. C (2, 4 MP).

Чистый modus ponens: «Если я что-то не доел, то моя мама ругается. Я что-то не доел. Значит, моя мама ругается». Доказательство готово!

Чересчур дотошно и заковыристо? Возможно, но в этом сила данного способа доказательства: поскольку в каждой строке производятся только совершенно элементарные преобразования имеющихся положений, рассуждение действительно сражает наповал. Это совершенно не означает, что подобное доказательство всегда можно отыскать играючи. Анализируя более сложные положения, иногда нужно серьезно поломать голову, чтобы найти правильный путь решения. Несмотря на это, еще сто лет назад математики мечтали о том, чтобы доказать всю математику: получить все возможные формальные выводы из всех возможных аксиом и в конце концов при помощи нескольких шагов рассуждений прийти к каждому истинному положению!

Сейчас мы достаточно вооружены знаниями, чтобы проанализировать историю о Супермене с формальной точки зрения. Действительно ли положение «Супермен не существует» синтаксически выводится из первоначальных посылок? Поскольку это делается совершенно технически, соответствующие абзацы выделены; те, у кого аллергия на формализм, могут их пропустить.

Сначала обозначим предложения буквами.
Супермен может предотвратить зло — L.
Супермен хочет предотвратить зло — W.
Супермен не всемогущ — U.
Супермен злой — B.
Супермен предотвращает зло — V.
Супермен существует — E.

Теперь запишем первые посылки.

1. Если Супермен может и хочет предотвратить зло, он его предотвращает:
   $(L \wedge W) \to V$.
2. Если Супермен не может предотвратить зло, он не всемогущ:
   $\neg L \to U$.
3. Если Супермен не хочет предотвратить зло, то он сам злой:
   $\neg W \to B$.
4. Супермен не предотвращает зло:
   $\neg V$.
5. Если Супермен существует, то он ни зол, ни невсемогущ.
   $E \to (\neg B \wedge \neg U)$.

Утверждается, что из этих пяти предпосылок следует, что Супермен не существует:

$$(L \wedge W) \to V,\ \neg L \to U,\ \neg W \to B,\ \neg V,\ E \to (\neg B \wedge \neg U);\ \neg E.$$

Чтобы это доказать, будем выводить всё новые и новые высказывания из уже имеющихся, при этом мы на каждом шаге рассуждений будем записывать, какое правило для этого использовали. Для этого доказательства нам понадобятся прежде всего различные правила.

$A \rightarrow B :: B \vee \neg A$ (импликация, сокращенно impl).

Это правило мы уже знаем из гл. 2. Два двоеточия означают, что вывод работает в обоих направлениях, то есть выражения эквивалентны.

$A \rightarrow B :: \neg B \rightarrow \neg A$ (противопоставление, сокращенно contra).

То, что это правило верно, легко увидеть, если привести простой пример: положение «кто пьет много спиртного, тот становится пьяным» эквивалентно фразе «кто не пьян, тот не выпил много спиртного».

$\neg(A \wedge B) :: \neg A \vee \neg B$.

$\neg(A \vee B) :: \neg A \wedge \neg B$ (правила де Моргана, сокращенно DM).

Правила де Моргана объясняют, как работает отрицание применительно к И- и ИЛИ-связям. Эти правила тоже станут легко понятными, если привести конкретное высказывание: «неправда, что я богат и знаменит» — то же самое, что и «я не богат или я не знаменит (или и то, и другое)».

$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C : A \rightarrow B$ (гипотетический силлогизм, сокращенно HS).

Это правило позволяет составлять цепочки импликаций: «Если идет дождь, на улице будет сыро. Если на улице сыро, машины легче попадают в занос. Значит, во время дождя машины легко попадают в занос».

Теперь можно составить доказательство. Мы начнем с применения отрицающего модуса к высказываниям 1 и 4:

6. $\neg(L \wedge W)$ (1, 4 MT).

В скобках за каждым новым положением указано, как мы его получили. Преобразуем высказывание с помощью правила де Моргана:

7. $\neg L \vee \neg W$ (6 DM).

Супермен либо не может, либо не хочет предотвратить зло. Если он не может, то, согласно высказыванию 2, он не всемогущ, если же он не хочет, то, согласно высказыванию 3, он зол. Теперь мы можем сделать вывод, что он либо не всемогущ, либо зол? Не так быстро! Нужно еще несколько шагов:

8. $\neg U \rightarrow L$ (2 contra).
9. $L \rightarrow \neg W$ (7 impl).
10. $\neg U \rightarrow \neg W$ (8, 9 HS).
11. $\neg U \rightarrow B$ (10, 3 HS).
12. $U \vee B$ (11 impl).

Теперь мы у цели:

13. $\neg(\neg B \wedge \neg U)$ (12 DM).

Это значит, что правая часть импликации из высказывания 5 является ложной, следовательно, согласно утверждающему модусу, левая часть тоже ложная.

14. $\neg E$ (5, 13 MT).

На этом доказательство окончено — мы вывели утверждение «Супермен не существует» из первоначальных посылок.

В логике высказываний все истинные высказывания можно вывести аналогичным способом. В рассуждениях действительно много шагов, которые так или иначе уже содержатся в исходных посылках. Это награда за логическую аккуратность. Если привлечь еще больше правил логического вывода, которые следуют из основополагающих, то доказательства будут короче. В противном случае они будут более длинными и менее наглядными[1]. Каково минимальное количество правил вывода? Можно сказать, что фактически используется только одно правило — утверждающий модус; все остальные выводятся из него. Поскольку для отображения всех логических связей достаточно одного НЕ И-оператора, все истинные положения логики высказываний

[1] Список наиболее употребительных логических аксиом и правил вывода вы найдете в приложении «Инструменты мышления».

можно вывести при помощи одного-единственного оператора и одного-единственного правила логического вывода. Правда, подобные доказательства едва ли кто-нибудь сможет прочесть.

То, что Леон показал своему отцу, — пример логического рассуждения. Из пяти исходных посылок следует корректный вывод. Конечно, это особый случай, на практике чаще всего имеются две или три посылки, как в утвердительном модусе. Рассуждение, в котором логические правила применяются верно, называют *действительным*, или *валидным*. Вывод в таком рассуждении может быть и неверным — истинным он будет только при условии, что все исходные посылки истинны. Если одна из них ложная, то валидное рассуждение может привести к ложному высказыванию. Как мы уже видели в гл. 1, из неверных посылок может следовать все что угодно.

Если рассуждение действительно и все исходные посылки истинны, то рассуждение называют доказательным. Такое рассуждение действительно приводит к истинному высказыванию.

Рассуждение, которое не отвечает вышеперечисленным требованиям, называют *ошибочным умозаключением*. В политических и мировоззренческих дискуссиях часто допускают ошибки в рассуждениях. Ниже перечислены классические логические ошибки, которые представляют собой не действительные рассуждения, а обороты речи, призванные убедить оппонента, когда надежных фактов не хватает. Эти ошибки порождены нежеланием думать и слепотой и относятся, скорее, к сфере риторики, нежели логики. Несмотря на это, я хочу свести их в небольшой и неполный список важнейших ошибочных умозаключений. Тот, кто раз запомнит эти образцы, сможет найти подобные примеры в каждом телевизионном шоу!

Ложный утверждающий или отрицающий модус. Эти чистейшей воды ошибки нарушают основополагающие правила логического вывода. Пример: «Тот, кто ест много шоколада, потолстеет. Я не ем шоколада, значит, я могу не бояться потолстеть». С формальной точки зрения, здесь из посылок $A \to B$ и НЕ A делается вывод НЕ B — это недопустимо.

Ложные исходные посылки. Сейчас станет понятно, что действительное рассуждение необязательно должно быть доказательным: «Млекопитающие не откладывают яйца. Утконос откладывает яйца. Следовательно, утконос — не млекопитающее». Логика безупречна, но исходная посылка неверна: яйцекладущие млекопитающие существуют.

Порочный круг. Из *A* делают вывод *B*, а потом (возможно, еще после некоторых промежуточных станций) снова возвращаются к *A*. Пример: «Генная инженерия слишком слабо исследована, поэтому многие люди ее отвергают. По этой причине исследования генномодифицированных организмов следует сильно ограничить».

Следующий класс ошибочных выводов создает недопустимые связи между высказываниями.

Post hoc, ergo propter hoc. Эта латинская фраза означает: из факта, что после *A* следует *B*, делают вывод, что *A* является причиной *B*. Например, «Я выпил молока, и через два часа у меня заболел живот. Значит, у меня аллергия на молоко». Каждый индуктивный вывод в естественных науках подвержен риску этой ошибки, а многочисленные и точные наблюдения вовсе не гарантируют доказательство причинной связи.

Скользкий путь. Из высказывания *A* выводится цепочка следствий, последнее из которых представляет собой нечто совершенно ужасное, поэтому и *A* должно быть плохим. Пример: «Если разрешить аборт физически неполноценного плода, в обществе будет меньше неполноценных людей. Если их будет меньше, к ним станут относиться с бóльшим предубеждением. И тогда дискриминация инвалидов вырастет еще больше, чем сейчас». В цепочке аргументации всегда есть одно или несколько слабых звеньев — в данном случае нет никаких признаков того, что дискриминация вырастет, если инвалидов станет меньше.

Ложная дилемма. Число возможных альтернатив сокращают, а затем делают неверный вывод: «Либо мы едем отдыхать в Голландию, либо вообще никуда не едем. Ты не хочешь в Голландию — хорошо, тогда мы остаемся здесь!» Риску сделать такую ошибку часто подвергаются детективы, если они из первоначальной посылки «это был либо садовник, либо дворецкий, либо горничная» исключают первые два возможных варианта и таким образом уверенно изобличают горничную. А преступление мог совершить и кто-то другой!

Ложная аналогия. *A* очень похоже на *B*. Если из *B* следует *C*, то из *A* следует нечто очень похожее на *C*. Пример из аргументации критиков эволюционной теории: «То, что из смеси органических субстанций развился полноценный организм, так же невероятно, как и предположение, что торнадо, обрушившись на склад металлолома, оставил после себя работающий мерседес». Замечу: каждое сравнение хромает, а некоторые сразу на все ноги.

Картонный болван. Мнение оппонента заменяют на искаженную или упрощенную выжимку, против которой затем выдвигают аргументы. Например, депутат А. требует, чтобы министерство обороны сократило расходы на канцелярские скрепки примерно на 20%. Депутат В. возражает: «Вы хотите оставить нашу страну беззащитной перед лицом врага?»

Ложная эквивалентность. Две вещи считают одинаковыми, хотя они одинаковыми не являются. Пример: «Защитники окружающей среды говорят о глобальном потеплении. Но у нас было очень холодное лето. Значит, они неправы». В этой аргументации климат (то есть общая усредненная метеорологическая обстановка за длительный период времени) приравнивают к погоде.

Особенно слабы аргументы, в которых открыто изменяют высказывания и определения перед лицом сильных контраргументов, чтобы сохранить исходную позицию.

Гипотезы «ad hoc». Допустим, некто утверждает существование сверхчувственных феноменов, таких как чтение мыслей, и предлагает серию опытов, чтобы подтвердить это при помощи научных экспериментов. Скептик пытается воспроизвести эксперимент и терпит неудачу. Вместо того чтобы интерпретировать ее как веское возражение против теории, продолжают настаивать на ее истинности и добавляют положение, что чтение мыслей невозможно в присутствии тех, кто в него не верит.

Смена критериев. «Эволюционная теория неверна, поскольку не имеется переходных форм от рыб к амфибиям». Если биолог затем демонстрирует тиктаалика, который как раз является такой переходной формой, звучит новый аргумент: «Но ведь нет переходных форм от тиктаалика к амфибиям».

«Ненастоящий шотландец». Здесь манипулируют терминами. «Все шотландцы — мужественные люди». «Но посмотри, Макдональд — настоящий трус». «Макдональд? Он неправильный шотландец». Если консервативный христианин говорит: «Христианин не может выступать за аборты!», то христиане, которые отстаивают либерализацию права на аборт, не являются для него настоящими христианами.

Многие ошибочные умозаключения легко узнать по тому, как в них защищают слабую аргументацию чужим авторитетом или, наоборот, показывают, что оппонент сидит в одной лодке с сомнительными персонами или сам не достоин доверия.

Аргумент от популярности. «20 миллионов фанатов фолкмузыки не могут ошибаться!», «Миллионы людей лечатся кровопусканием и довольны им!»

Аргумент от авторитета. «Большие дозы витамина С защищают от простуды. Это сказал Лайнус Полинг, а он дважды становился нобелевским лауреатом». Но Полинг получил нобелевскую премию по химии и премию мира и только в старости занялся необычными формами медицинской терапии. Каждая видная персона, которая снимается в рекламе горячих сарделек, бросает свой авторитет (обычно в области проведения телевикторин) на чашу весов для того, чтобы убедить кого-то в том, в чем сама не разбирается. И наоборот, таким же манером пытаются отразить хорошие контраргументы: «У тебя нет специального образования в сфере трансперсональной ауратерапии, поэтому ты ничего не можешь сказать по этому поводу».

Судьба Галилея. «Галилей же был осмеян за свои взгляды еще при жизни — а сегодня он считается одним из величайших ученых». Возможно, все великие первооткрыватели действительно были однажды подвергнуты осмеянию, но не каждая сомнительная мысль, по поводу которой сегодня качают головой, позже станет общепризнанной.

Судьба Гитлера. Считается, что любое мнение можно дискредитировать, указав на то, что Гитлер придерживался сходных взглядов. Особенно это актуально для немецкого языкового пространства. Вегетарианцы — это замаскированные нацисты, а автобаны — дьявольское изобретение, поскольку их массовое строительство ускорил Гитлер. Классическим примером такого аргумента служат фразы, которые произнес Гельмут Коль в 1986 г. в интервью американскому «Newsweek» о Михаиле Горбачеве: «Это современный коммунистический фюрер, … он кое-что понимает в пиаре. Геббельс тоже кое-что понимал в пиаре. Нужно называть вещи своими именами!»

Аргумент «ad hominem». Эпизод из жизни оппонента или особенность личности, которая не имеет ничего общего с предметом спора, используется для дискредитации позиции оппонента: «Господин X. однажды получил штраф за превышение скорости, поэтому его позиция по вопросу об охране окружающей среды с самого начала не вызывает доверия». В США кандидатов в президенты отбирают прежде всего исходя из их семейной жизни — тому, у кого было бурное или необычное прошлое, не стоит даже подступаться к политической должности.

Tu quoque. В переводе с латыни — «ты тоже». А. агитирует за более масштабную защиту животных и вегетарианский образ жизни, а В. ему возражает: «Но ты же сам носишь кожаную куртку, а вчера я видел тебя с колбасой в руке!» Образ жизни А. может противоречить его взглядам, возможно даже, что еще совсем недавно А. занимал прямо противоположную позицию, но это не делает его рассуждения хуже.

К наиболее слабым аргументам относятся те, которые основаны только на идеологии и больше ни на чем.

Аргумент от традиции. Пару десятилетий назад новое автоматически считали лучшим (это называется выводом «ad novitatem»), сегодня часто аргументируют тем, что старое — это всегда хорошо, как, скажем, «традиционная китайская медицина». В рекламе оба подхода часто комбинируют, к примеру предлагая мармелад, сделанный «по проверенному, старому домашнему рецепту», но в «новой упаковке».

Натуралистический аргумент. Все «натуральное» не может быть плохим. Мужчины в основной своей массе сильнее женщин, поэтому их значение в обществе больше. В природе нет гомосексуальных отношений (что вообще-то неверно), поэтому они неприемлемы. «Натуральные» добавки к пищевым продуктам лучше «искусственных».

Несколько плохих способов аргументации имеют чистой воды риторическую природу — слабость собственной позиции приходится преодолевать словами. Полноты ради упомянем пару примеров.

Эквивокация. В этом случае прибегают к неоднозначным терминам. Пример: «Убивать невинное человеческое существо — аморально. Эмбрион — невинное человеческое существо. Поэтому аборт аморален». Можно ли так аргументировать? Большая часть слушателей при словах «человеческое существо» в первой фразе представила себе нечто, отличное от эмбриона.

Игнорирование вопроса. В телешоу по встречаемости это проступок номер один: не отвечать на неудобный вопрос и надеяться, что собственный поток слов предаст его забвению.

Ad nauseam. Надеются на то, что ложное утверждение будет воспринято как истинное, если его повторить достаточное число раз. «В Средние века люди верили, что мир представляет собой плоский диск», «согласно законам аэродинамики, шмель вообще не может летать» — тот, кто вводит в интернет-поисковик ключевые слова «бесполезные знания», найдет сотни таких бездоказательных и по большей части ложных утверждений.

Подтасовка. «Вы, наконец, прекратили бить свою жену?» Тот, кто уже в вопросе приписывает нечто своему визави, вынуждает его подробно отбиваться от предъявленных обвинений. Ведь на вопрос нельзя ответить ни «да», ни «нет», чтобы не признать за собой приписанной грубости.

И наконец, есть еще один совершенно запутанный ошибочный аргумент.

Ложный вывод из ложного вывода. Если оппонент допускает ошибку, это нужно всегда разоблачать. Только вот довод против его утверждения не является таким разоблачением — оно, несмотря ни на что, может быть истинным!

Глава 4

Решение задач 1,
или
Логикали

В Германии логикалями (Logicals) называют особые интеллектуальные развлечения: суть в том, что, абстрактно говоря, надо установить отношения между элементами различных групп. Например, мы знаем имена пяти друзей, у каждого из которых есть собственный любимый напиток, свой любимый вид спорта, девушка и домашнее животное. К одному имени относится только один напиток, вид спорта, девушка и животное, не повторяясь. Дается ряд прямых и косвенных указаний на то, что к чему относится, а в конце загадки часто дается вопрос вида «Как зовут девушку любителя пива?».

Если встать на математически-логическую точку зрения, задача выглядит следующим образом: у нас есть некоторое количество множеств, в каждом из них по n элементов, и нужно определить соответствие между этими множествами, которое отвечает ряду условий. В примере даны множества с M_1 по M_5, включающие мужчин, напитки, женщин, виды спорта и домашних животных. Нужно образовать пять рядов соответствий (Свен, пиво, футбол, Клара, волнистый попугайчик). При этом, конечно, так, чтобы у двух мужчин не было общей подруги.

Задача вполне решаема: можно составить все возможные комбинации, а затем проверить каждую из них, удовлетворяет ли она всем условиям. Но уже в примере с пятью группами этих комбинаций будет слишком много: есть $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ способов раздать каждому мужчине по напитку. Для каждого из этих способов есть 120 вариантов с видами спорта, затем соответственно по 120 вариантов с девушками и домашними животными. Итого

$$120 \times 120 \times 120 \times 120 = 207\,360\,000.$$

Современный компьютер может решить задачу тупым перебором вариантов чуть менее чем за час. Но человек не обязан применять грубую силу, он может, логически рассуждая, постепенно сужать круг возможностей до тех пор, пока не останется одна-единственная.

Вот пример задачки для групп из трех элементов. В Нойштадте есть три футбольных клуба — «Первый футбольный клуб», «Спортивный союз» и «Кикерс». У каждого свой стадион: есть центральный стадион, парковый стадион и спортивная арена. Одна команда играет в синей форме, другая — в красной, третья — в белой. И наконец, у каждого клуба различается число членов: 300, 400 и 500.

Даны следующие условия.

1. В «Первом футбольном клубе», команда которого играет в синей форме, меньше членов, чем в клубе, играющем на центральном стадионе.
2. В «Спортивном союзе» 400 членов.
3. «Кикерс» не играет в красной форме. Число его членов и число членов клуба, играющего на парковом стадионе, не равно 300.

Важнейшим вспомогательным средством для решения задачки является схема, в которую мы вносим результаты, к которым уже пришли. По большей части отметки в ней отражают отношения между элементами разных множеств. У нас четыре группы, что лучше всего изобразить при помощи системы координат с четырьмя осями. Но на бумаге в нашем распоряжении только два измерения, поэтому мы расположим множества немного по-другому.

	центр	парк	арена	синий	красный	белый	300	400	500
«Первый футбольный клуб»									
«Спортивный союз»									
«Кикерс»									
300									
400									
500									
синий									
красный									
белый									

Теперь мы медленно заполняем клеточки значками «плюс», если определенное соответствие найдено, и «минус», если мы установили, что связи точно нет. Для каждого квадрата 3 × 3 должен в итоге стоять только один плюс в каждом столбце и каждой строке. Задачка решена, когда три верхних квадрата заполнены целиком.

Следующая таблица показывает, какую информацию мы можем сразу же получить по определению из данных нам трех условий. При этом иногда приходится «перескакивать со строки на строку»: условие 1, к примеру, гласит, что «Первый футбольный клуб» не играет на центральном стадионе, что в нем не 500 членов и что клуб, который играет на центральном стадионе, не может иметь 300 членов.

	центр	парк	арена	синий	красный	белый	300	400	500
«Первый футбольный клуб»	–			+					–
«Спортивный союз»								+	
«Кикерс»		–			–		–		
300	–	–							
400									
500									
синий									
красный									
белый									

На следующем шаге мы проставляем знак «минус» в каждом из квадратов 3 × 3 в тех строках и столбцах, где рядом стоит «плюс». А если в строке или столбце стоят уже два «минуса», в последнюю ячейку смело ставим «плюс».

	центр	парк	арена	синий	красный	белый	300	400	500
«Первый футбольный клуб»	–			+	–	–	+	–	–
«Спортивный союз»				–	+	–	–	+	–
«Кикерс»		–		–	–	+	–	–	+
300	–	–	+						
400									
500									
синий									
красный									
белый									

Таким образом, все соответствия между клубами, формой и количеством членов уже стали понятны. Остается разобраться только со стадионами. Информацию о них мы извлекаем из нижних клеточек. Именно их мы можем заполнить как отражение верхних строк: мы знаем, что у «Первого футбольного клуба» 300 членов, поэтому ему соответствует вся информация, которая зафиксирована в строке «300», — особенно нас интересует «плюс» под спортивной ареной. Теперь диаграмма заполнена.

	центр	парк	арена	синий	красный	белый	300	400	500
«Первый футбольный клуб»	–	–	+	+	–	–	+	–	–
«Спортивный союз»	–	+	–	–	+	–	–	+	–
«Кикерс»	+	–	–	–	–	+	–	–	+
300	–	–	+						
400									
500									
синий									
красный									
белый									

Можно заполнить еще и все нижние клетки, но этот труд был бы излишним — мы ведь уже соотнесли все стадионы, цвета и числа с футбольными клубами, значит, работа окончена и задача решена.

Хотите задачу посложнее? Пожалуйста[1]! Речь идет о знаменитом телесериале «Доктор Хаус». Главный герой с помощью своей команды каждый день с понедельника по пятницу лечит людей от тяжелых болезней. Но есть еще и боковые сюжетные линии. Дана следующая информация.

1. Во вторник Хаус занимался сложным случаем отравления пестицидами.
2. Когда Хаус имел дело с последствиями укуса клеща, у него были проблемы с Воглером, новым спонсором клиники.
3. Гангстера Хаус лечил от отравления кадмием. Это было в день, когда врач снова встретил свою бывшую.
4. В тот день, когда Хаус обследовал учительницу, Уилсона бросила жена. Два дня спустя Уилсон очень помог Хаусу во время удаления опухоли.
5. Девушку не лечили в тот день, когда Кэмерон начала отношения с Чейзом.
6. В четверг Кадди обедала с Уилсоном.
7. В среду пациенткой Хауса была монахиня.

Спрашивается: когда лечили студента и кто болел бубонной чумой?

Здесь тоже нужно сначала упорядочить имеющуюся информацию (см. следующую таблицу). Столбцы и строки уже заполнены значками «минус», и вся информация из нижних клеточек отражена в строках с днями недели. Кроме того, событие, которое произошло на следующий день после другого, не могло случиться в понедельник, а если два дня спустя произошло еще одно, то первое событие произошло самое позднее в среду.

И на диаграмме уже кое-что проясняется: гангстер мог узнать о своем тяжелом отравлении только в четверг!

1 Эту задачу придумал Франк Вестенфельдер, www.daf-raetsel.de.

	пестициды	клещ	кадмий	опухоль	чума	гангстер	учительница	девушка	монахиня	студент	Фоглер	Уилсон один	бывшая	Кэмерон и Чейз	Кадди и Уилсон
понедельник	–		–			–			–						–
вторник	+	–	–	–	–	–			–						–
среда	–		–			–	–	–	+	–		–			–
четверг	–	–					–		–		–	–	–	–	+
пятница	–		–			–	–		–			–	–		–
Воглер	–	+	–	–	–		–								
Уилсон один		–				–	+	–	–	–					
бывшая		–				–	–								
Кэмерон и Чейз		–					–	–							
Кадди и Уилсон		–					–								
гангстер	–	–	+	–	–										
учительница			–												
девушка			–												
монахиня			–												
студент			–												

Теперь одно следует за другим. Единственное заковыристое место — выяснить, в понедельник или во вторник Хаус лечил учительницу. Здесь помогает информация, что два дня спустя оперировали опухоль; тогда подходит только понедельник (см. следующую таблицу).

	пестициды	клещ	кадмий	опухоль	чума	гангстер	учительница	девушка	монахиня	студент	Фоглер	Уилсон один	бывшая	Кэмерон и Чейз	Кадди и Уилсон
понедельник	–		–			–			–						–
вторник	+	–	–	–	–	–			–						–
среда	–		–			–	–	–	+	–		–			–
четверг	–	–					–		–		–	–	–	–	+
пятница	–		–			–	–		–			–	–		–
Воглер	–	+	–	–	–		–								
Уилсон один		–				–	+	–	–	–					
бывшая		–				–	–								
Кэмерон и Чейз		–					–	–							
Кадди и Уилсон		–					–								
гангстер	–	–	+	–	–										
учительница			–												
девушка			–												
монахиня			–												
студент			–												

Задачки такого вида построены на том, что они не только дают однозначную информацию, но и устанавливают такие отношения между группами, которые не всегда можно легко отобразить на диаграмме, а нужно удерживать в голове или еще раз отдельно записывать для наглядности.

Теперь-то вы прекрасно вооружены, чтобы бросить вызов задаче, которую на многих интернет-сайтах называют «самой трудной в мире». Конечно, утверждение, что ее придумал Эйнштейн и при этом сказал, что только два процента людей могут ее решить, — полная ерунда. Эта загадка известна под названием «Задача про зебру», в первоначальной версии она была опубликована 17 декабря 1962 года в журнале Life International Magazine. В задаче даны шесть групп по пять элементов в каждой; речь идет о представителях разных национальностей, которые пьют разные напитки, курят разные сигареты и держат разных домашних животных. Все живут рядом, в соседних домах разных цветов. Даны следующие условия.

1. Есть пять домов.
2. Англичанин живет в красном доме.
3. Испанец держит собаку.
4. Кофе пьют в зеленом доме.
5. Украинец пьет чай.
6. Зеленый дом стоит справа от белого.
7. Любитель сигарет Old Gold разводит улиток.
8. Сигареты Kool курят в желтом доме.
9. Молоко пьют в среднем доме.
10. Норвежец живет в первом доме.
11. Человек, курящий Chesterfield, живет рядом с владельцем лисы.
12. Kool курят в доме, который рядом с тем, где живет лошадь.
13. Любитель Lucky Strike предпочитает апельсиновый сок.
14. Японец курит Parliament.
15. Норвежец живет рядом с синим домом.

А теперь ответьте: кто пьет воду и кому принадлежит зебра?

Глава 5

Адская машина,

или

Считайтесь с логикой!

Первое обстоятельство, которое заметил Джеймс Блонд, когда с глаз медленно спала пелена, было ему вполне приятно: темноволосая красотка, с которой он познакомился сегодня утром, все еще лежала рядом с ним, и на ней не было ничего, кроме маленького красного бикини. Как же ее звали? Ах да, Тоня.

Второе, что заметил Джеймс Блонд, — резкая боль в затылке.

Когда его рука рефлекторно потянулась к Тоне, он заметил и третье обстоятельство: он не мог пошевелить руками, поскольку они были надежно связаны у него за спиной. Ноги тоже не слушались; их с Тоней голени были прочно связаны вместе. У Блонда еще никогда не было столь тесных отношений.

Агент огляделся по сторонам: они лежали на каркасе кровати без матраса в подвальном помещении, которое было обставлено совершенно по-спартански — стол и стул, больше ничего. Тусклая лампа молочного стекла давала достаточно света, чтобы осмотреть интерьер. На столе стоял аппарат, похожий на электронный; по крайней мере, у него был дисплей с красными светодиодами, на котором шел обратный отсчет времени: 7:34, 7:33, 7:32… У Блонда появилось нехорошее предчувствие.

Он принялся толкать локтем спящую Тоню, пока та не застонала. Она устало открыла глаза, но в ситуации сориентировалась мгновенно. — Дело дрянь! — вырвалось у девушки.

Ее голос звучал уже не так мягко и соблазнительно, как утром в прибрежном баре, когда она к нему подошла.

— Джеймс, нам нужно прочесть расшифровку, — продолжила она. — У меня нет времени на долгие объяснения, но я не просто девушка из бара, за которую вы меня приняли. Тоня Тёрнер, ЦРУ.

— Э-э-э, правда? — Ничего оригинальнее Блонду в голову не пришло. К счастью, дама принадлежит к дружественной организации, подумал он, иначе тестостероновый туман в голове мог бы стоить мне жизни.

— Мы здесь из-за Макмессера и его наркокартеля, — продолжала Тоня. — Я собиралась вам это сказать рано или поздно, но решила еще немного понаслаждаться вашим наивным очарованием.

«Наивным» Блонд быть совершенно не хотел, а вот против наслаждения не имел ничего.

— О´кей, только сначала мы должны освободиться от этих пут! — сказал он твердым голосом. Он — мужчина и должен владеть ситуацией. Но как? На Блонде только трусы, и он еще помнит, как негодяи забирали у него всё, вплоть до наручных часов.

— Вы можете повернуться и достать до застежки бикини? — спросила Тоня. — Там я на всякий случай ношу крошечный швейцарский нож. Я не уверена, что люди Макмессера его нашли, постеснялись все-таки.

Оба попытались, насколько это было возможно, так повернуться друг к другу, чтобы Блонд мог ощупать лямки бикини. В других обстоятельствах этот маневр очень бы ему понравился, но сейчас даже ему было не до демонстраций своих эротических возможностей. Наконец, Блонд почувствовал маленький нож, не более четырех сантиметров в длину — преступники действительно должны были обыскивать Тоню тщательней, чтобы его найти.

Блонд легко извлек нож из ткани и раскрыл лезвие. Первым делом он перерезал веревки на руках Тони, а через полминуты они оба были свободны. Как можно было предвидеть, дверь в подвальное помещение была закрыта. А светодиодный экран машины на столе беспощадно отсчитывал: 5:19, 5:18, 5:17…

Оба агента взглянули на аппарат более пристально: черный ящик, снаружи только экран с таймером и три провода, красный, зеленый и синий, которые выходили из корпуса и снова исчезали в его недрах.

— Через пять минут эта вещь должна поднять нас на воздух, — сказал Блонд упавшим голосом. — Дайте-ка мне ваш нож…

Он взял у Тони нож, открыл лезвие и повернулся к машине, собираясь что-нибудь сделать.

Тоня повисла у него на руке. — Эй, вы что задумали? Вы что, собираетесь сократить время ожидания?

— Я хочу перерезать красный кабель, — ответил Блонд.

— Красный? А почему именно его? — спросила сбитая с толку Тоня.

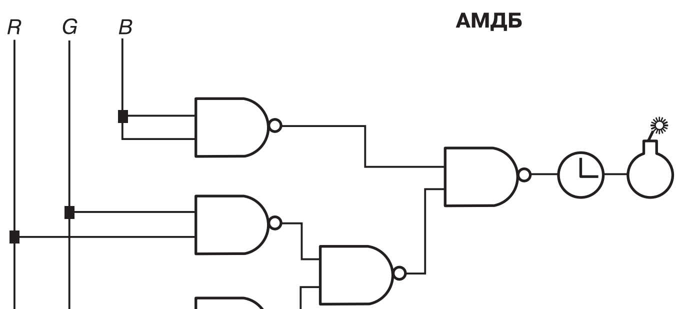
— Я всегда перерезаю красный кабель, — сказал Блонд, пожав плечами. — До сих пор это работало.

— Боже мой! Может быть, мы подойдем к делу аналитически? — Тоня покачала головой. И удивилась, каким образом этот якобы крутой британский супершпион сумел дожить до сегодняшнего дня с таким импульсивным отношением к делу. — Давайте-ка посмотрим на устройство повнимательнее.

Тоня осмотрела ящик со всех сторон. Затем она подвинула его поближе и перевернула на бок. Блонд инстинктивно зажмурил глаза и заткнул уши, за что получил от Тони уничтожающий взгляд.

— Ах, вот оно где! — победно воскликнула агент ЦРУ. На оборотной стороне была приклеена табличка, покрытая символами. Если бы Блонд взглянул на древнеегипетский папирус, он понял бы ровно столько же.

Тоня, наоборот, активно изучала табличку, иероглифы ей явно о чем-то говорили.



— Блонд, на что вы так уставились? Агенты МИ-6 не проходят курс электроники?

— Для этого у нас есть отдел с литерой Q, — обиделся Блонд, — а мы изучаем такие предметы, как стрельба и карате.

— Но сейчас с нами нет папочки Q, чтобы помочь маленькому Джеймсу выпутаться из беды, — съязвила Тоня. — Итак: здесь электронная схема данной машины. Почему они ее оставили — без понятия. Либо люди Макмессера ее просто проглядели, либо они имеют столь же глубокие познания, что и вы. В данном случае, нам все равно. Мы должны поскорее отыскать комбинацию.

3:28, 3:27, 3:26…

— Буквы *R*, *G* и *B*, понятное дело, обозначают красный, зеленый и синий кабели. Затем пара электронных узлов, по поводу которых я могу сказать, что они одинаковы. Символ с часами тоже понятен, это счетчик времени.

— А что означает символ справа? — спросил Блонд.

— Это не стандартный значок для электронных схем, — ответила Тоня, холодно усмехнувшись. — Это бомба.

— Тогда я знаю, что означают буквы АМДБ, — тут же заявил Блонд.

— И что же?

— Адская машина Джеймса Блонда, — ответил Блонд и просиял, дважды гордый: тем, что расшифровал аббревиатуру, и тем, что бомбу назвали в его честь.

— Похоже на правду, но малоинтересно, — сказала Тоня. — Теперь к схеме: символы все одинаковые. Этот, похожий на большую букву «D», — И-вентиль, но вместе с маленьким кружком — это так называемый НЕ И-вентиль.

Взгляд Блонда оставался все таким же непонимающим.

— Такой вентиль имеет два входа и один выход. Входы могут быть в двух состояниях: проводящем и не проводящем ток, или 1 и 0. Три первоначальных входа *R*, *G* и *B* сейчас все под током, то есть в состоянии 1. Если мы перережем один или несколько проводов, их состояние станет 0. Теперь мы должны найти комбинацию, с помощью которой в конце схемы у часов будет состояние 0.

— А что именно делают эти вентили? — спросил Блонд.

— НЕ И-вентиль соответствует логическому оператору НЕ И, — сказала Тоня. — И-связь для двух высказываний только тогда истинна, когда оба высказывания истинны. НЕ И-связь в этом случае *ложна*, а истинна она тогда, когда оба высказывания ложны. В электротехническом смысле это означает: НЕ И-вентиль выдает 1, если на обоих входах 0, и наоборот.

Блонд хмыкнул. — И мы сейчас должны посчитать, что надо сделать с системой, чтобы получить на выходе 0?

— Логично, — ответила Тоня, которая уже начала составлять в голове комбинации. — Чтобы упростить задачу, мы можем перевести схему на язык логических символов. В логике НЕ И-связь обозначается вертикальной чертой.

За недостатком письменных принадлежностей Тоня рисовала пальцем по толстому слою пыли, лежащему на столе.

— Посмотрим еще раз на три символа слева. Как они связаны между собой? Если на схеме провода пересекаются, это необязательно означает соединение; соединительные узлы обозначены черными точками.

— Итак, провод *B* соединен сам с собой, а *R* и *G* соединены дважды, — пробормотал Блонд.

— Правильно! — сказала Тоня, и агент Ее Величества был горд, как третьеклассник, получивший отличную оценку.

Тоня написала в пыли три соединения:

$$B \mid B \qquad R \mid G \qquad R \mid G.$$

Выходы обоих *RG*-пересечений еще раз соединены НЕ И-вентилем, а уже этот выход соединен с *BB*-пересечением…

Она добавила еще несколько штрихов. — Готово!

В пыли значилось:

$$(B \mid B) \mid ((R \mid G) \mid (R \mid G)).$$

— Все только усложнилось, — проворчал Блонд. — Нельзя ли раскрыть скобки? Например, при помощи умножения. Это бы здорово упростило дело.

— Здесь так нельзя. Если бы это всё были И-связи, тогда можно было бы просто опустить скобки, но НЕ И-связь не ассоциативна.

Тоня проигнорировала взгляд блондинки, которым на нее уставился Блонд. Для дополнительных уроков времени не было.

— Чтобы за этим лесом из НЕ И увидеть деревья, скобки очень важны. Посмотрите на оба выражения, которые отделены от верхних чертой. Слева стоит $B|B$, но это то же самое, что и НЕ *B*. Справа стоит такое же выражение, с $R|G$ вместо *B*. Значит, выражение можно записать следующим образом…

Тоня написала две строки:

$\neg B \mid \neg(R \mid G)$,

$\neg(\neg B \wedge (R \wedge G))$.

— Двойное НЕ мне не нравится, — продолжала Тоня. — Поэтому я преобразую выражение по правилу Де Моргана. — В пыли тут же возникла следующая формула:

$B \vee \neg(R \wedge G)$.

Тоня видела, что Блонд все еще мало что понимал. Она матерински положила ему руку на плечи. Распределение ролей между ними с утреннего флирта и свидания в отеле сильно поменялось. Блонда охватило теплое чувство защищенности, совсем как в детстве.

— Я могу перевести: это выражение читается как «*B* ИЛИ НЕ (*R* И *G*)», — сказалаТоня, не сводя глаз с экрана, который показывал уже 0:59. — Чтобы бомба не взорвалась, выражение должно иметь результат 0, то есть быть ложным. Когда высказывание с ИЛИ является ложным? Когда обе части ложны. Значит, и *B*, и НЕ (*R* И *G*) должны иметь значение 0. То есть выражение (*R* И *G*) должно иметь значение 1, а это значит, что и *R*, и *G* должны быть равны 1. Мы могли бы это доказать, расписав истинностную таблицу, но сейчас у нас нет на это времени. Итак, есть только одна комбинация, при которой бомба не взорвется, — если у *B* будет значение 0, а у *R* и *G* — 1.

Экран показывал 0:17.

Лицо Блонда расплылось в понимающей улыбке. — Можно мне? — спросил он, забрал нож и взял синий провод. Посмотрев на Тоню и дождавшись ее одобрительного кивка, он перерезал провод.

Часы показали 0:00. Ничего не произошло.

Логически соединяя

В предшествующих главах логические связи были представлены только между высказываниями, из которых мы могли сделать более или менее интересные заключения. Но логическое исчисление, которое при этом использовалось, нисколько не интересуется содержанием положений. Для формального аппарата в конечном счете интересно только то, истинным или ложным является положение, — все истинные положения для логики на одно лицо.

От этого соображения недалеко до мысли, что мы, собственно говоря, оперируем только двумя объектами и что действия с ними являются разновидностью исчисления. Английский логик Джордж Буль (1815–1864 гг.) первым это понял и позже развил названную его именем булеву алгебру. Она полностью эквивалентна логике высказываний, но рассматривает операции под другим, математическим углом зрения.

В булевой алгебре мы оперируем только двумя «числами», 1 и 0, которые соответствуют истинностным значениям логики высказываний. На основе этих чисел для начала можно определить три операции, их называют конъюнкцией, дизъюнкцией и отрицанием. Чтобы не усложнять дело, мы возьмем здесь известные обозначения $\wedge$, $\vee$ и $\neg$. Часто вместо них используют также символы сложения и умножения, поскольку с этими операциями булева алгебра состоит в близком родстве.

Здесь представлены таблицы операций — ничего нового, мы только заменили в таблицах из гл. 2 истинностные значения *и* и *л* на 1 и 0, а также использовали строчные буквы в качестве переменных.

x	$\neg x$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Как отличить булевы операции от арифметических действий сложения и умножения? Операция И полностью соответствует знакомому умножению — это, возможно, сбивает с толку, поскольку мы в быту говорим «два *и* три будет пять». В таблице для ИЛИ три столбца соответствуют обычному сложению, и только в одном есть неувязка: 1 плюс 1 равно, конечно, 2, но такого числа в булевой алгебре нет, поэтому здесь всё равно будет 1.

Обе операции полностью симметричны друг другу — если в уравнении заменить 1 на 0, $\wedge$ на $\vee$ или, наоборот, оно останется верным:

$(0 \wedge 0) \vee 0 = 0;$

$(1 \vee 1) \wedge 1 = 1.$

Этого свойства нет у сложения и умножения:

$(0 + 0) \times 0 = 0;$

$(1 \times 1) + 1 = 2.$

Поэтому в булевой алгебре используются другие правила арифметических действий. Например, скобки можно раскрывать двумя способами:

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$

Это уже упомянутые в гл. 3 правила де Моргана. При работе с обычными числами правило называется дистрибутивным законом и используется в следующей формулировке:

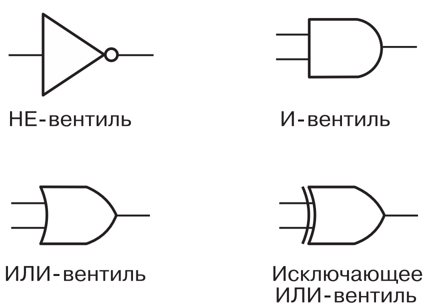
$x(y + z) = xy + xz.$

Джордж Буль, конечно, не думал о том, что его правила арифметических действий однажды станут основой для развития компьютеров. Но поскольку они упрощают логические связи и описывают отношения цифрами, т. е. *оцифровывают*, их легко перевести в электронные схемы, с которыми мы хорошо знакомы по истории о Джеймсе Блонде.

Важнейшими элементами в этих схемах являются так называемые «вентили», которые соответствуют логическим операторам. В истории фигурировали только вентили НЕ И. Их не так легко читать (особенно если их ставят второпях), зато они обладают тем преимуществом, что ими одними можно выразить любую связь. Это объясняется, конечно, тем, что через оператор НЕ И $(x \mid y)$ можно выразить все другие логические операторы.

Каким образом схема на физическом уровне производит из входящего сигнала исходящий, не должно нас интересовать в этой книге. На заре компьютерной эпохи схемы состояли из электромеханических реле; они содержали маленькие коммутаторы, которые переключались при прохождении электрического тока. Механизмы трещали, были довольно громоздкими, а реле часто выходили из строя. В наше время схемы заменили на полупроводники и миллиарды крошечных чипов, но принцип остался тем же.

Вот изображения самых главных вентилей:



Заметьте, что вентили И и НЕ И различаются только одним кружочком, — этот маленький значок означает НЕ и превращает каждый оператор, к которому присоединен, на противоположный.

Булеву алгебру часто путают с двоичной системой счисления. Но логические операторы подчиняются другим законам, несмотря на то что на компьютере мы можем в том числе и считать. Как можно отобразить, к примеру, простое сложение при помощи логической схемы?

Для начала немного освежим в памяти тему двоичных чисел. Основание 10 для записи натуральных чисел (оно дает нам разряды десятков, сотен, тысяч и так далее) выбрано абсолютно произвольно, вероятно, в связи с тем, что у нас по десять пальцев на руках. В качестве основания можно взять любое понравившееся вам число, но в любом случае понадобятся минимум две цифры. Эта простейшая система из двух цифр и называется двоичной, а натуральные числа в ней записываются так: 1, 10, 11, 100, 101…

Вот соотношение чисел десятичной и двоичной систем:

десятичная	**двоичная**
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
16	10 000
32	100 000
64	1 000 000
100	1 100 100

Считают в двоичной системе точно так же, как и в десятичной, только нужно раньше переходить в следующий разряд, поскольку используется меньше цифр. Числа при этом будут существенно длиннее, но счет — проще. Маленькая таблица умножения в двоичной системе состоит только из одной строки: 1 умножить на 1 будет 1!

Давайте начнем построение нашего суммирующего компьютера, в котором мы используем схему, складывающую два одноразрядных числа. Таблица сложения выглядит так:

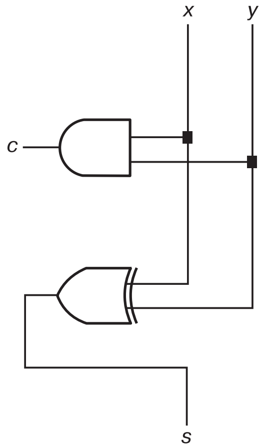
x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	10

Только последняя строка в этой таблице создает проблемы: логическая функция не может дать результат 10, только 0 или 1.

Также и при сложении в столбик мы записываем, к примеру, результат 17 под чертой как 7, а единицу переносим в следующий разряд. То же самое мы делаем здесь: мы пишем результат 0, а единицу переносим. В остальных трех случаях переносится 0.

Иными словами, наш выход должен состоять из двух цифр: *s* (*sum* — сумма) в первом разряде и *c* (*carry* — перенос) — в следующем. Одноразрядный результат, когда 1 + 1 дает 0, точно соответствует оператору XOR (исключающему ИЛИ): результат равен 1, если *x* и *y* разные, и 0, если они совпадают.

Переносится 1, если *x* и *y* равны 1, в противном случае — 0. Это И-оператор! Итак, мы можем нарисовать следующую электронную схему.



Этот «компьютер» может складывать числа от нуля до единицы, причем максимальный результат — 2. Чтобы расширить возможности, мы должны построить другую схему, которая умеет складывать многоразрядные числа. Для этого мы создадим «полный сумматор», который может работать с любыми числами. На входе он получает не только оба вводимых числа *x* и *y*, но и переносимое с меньшего разряда значение *ci* (*carry in* — перенос на входе), которое может быть равно либо 1, либо 0. На выходе будет сумма *s* и перенос *co* (*carry out* — перенос на выходе) для следующего разряда. Так выглядит эта таблица сложения:

x	y	ci	s	co
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Какие логические связи между x, y и ci приводят к выходам s и co? Есть несколько вариантов, здесь представлен один, который, пожалуй, легче всего понять. Следующие абзацы — для тех читателей, которые любят вычисления!

Давайте посмотрим на верхнюю и нижнюю половины таблицы. Если ci равно нулю, то для s, как в случае с одноразрядным сумматором, подходит XOR-связь x и y. Это исключающее ИЛИ записывают при помощи знака плюс в кружочке:

$$s = x \oplus y.$$

Если ci равно 1, то для s подойдет прямо противоположный оператор ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, мы встречались с ним в главе 2. Иногда его называют оператором равносильности или эквивалентности: выражение равно 1, если x и y равны, и равно 0, если они неравны:

$$s = x \leftrightarrow y.$$

Чтобы для s получить единственную формулу, в которую входит ci, надо постараться. Мы используем четыре простых булевых правила, в истинности которых легко убедиться, если подставить вместо x числа 1 и 0:

$$x \wedge 1 = x;$$

$$x \wedge 0 = 0;$$

$$x \vee 1 = 1;$$

$$x \vee 0 = x.$$

Полностью записанное выражение на первый взгляд выглядит сложным:

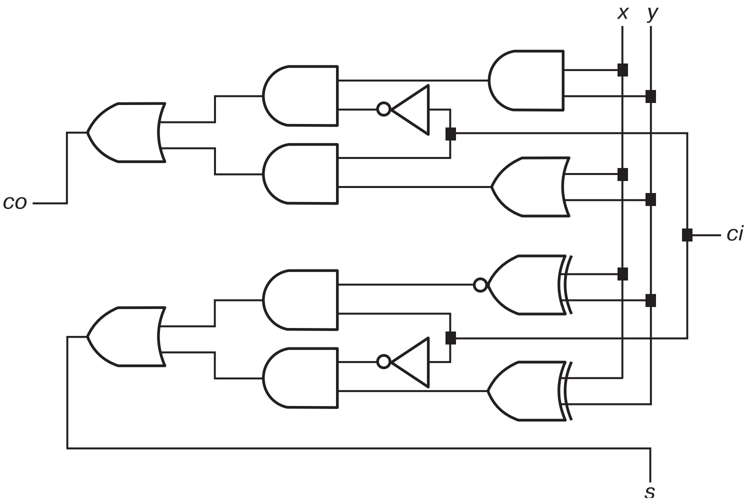
$s = ((x \oplus y) \wedge \neg ci) \vee ((x \leftrightarrow y) \wedge ci).$

Если ci равно 0, то правая половина выражения равна 0, а слева получается сумма $x \oplus y$, как в одноразрядном сумматоре. Если ci равно 1, то левая половина выражения равна 0, а правая соответствует четырем последним строкам нашей таблицы. При этом оператор ИЛИ заботится о том, чтобы та часть, которая равна 0, выпадала из выражения.

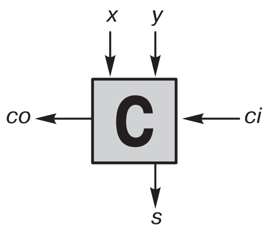
Подобную же конструкцию мы создадим для того, чтобы вычислять переносимое значение co: в верхней половине таблицы оно получается как результат применения к x и y оператора И, а в нижней — оператора ИЛИ. Обе части связаны между собой точно таким же образом, чтобы отобразить влияние ci:

$ci = ((x \wedge y) \wedge \neg ci) \vee ((x \vee y) \wedge ci).$

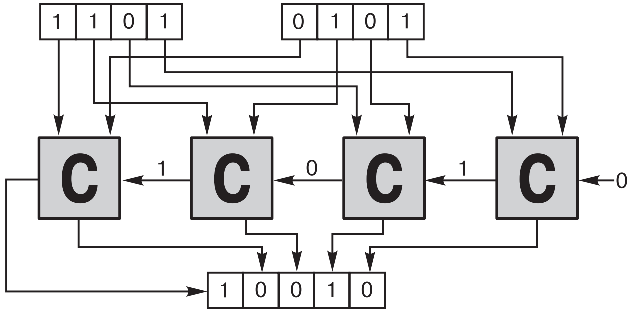
Теперь для наглядности нужно расставить всего двенадцать вентилей, и сумматор готов.



Все элементы этой схемы мы объединим в одну клеточку, у которой есть несколько входов и выходов, и обозначим ее буквой С («сумматор»):



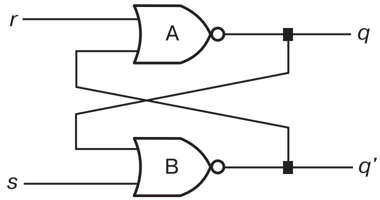
Если мы хотим сложить два четырехзначных числа, мы должны лишь соединить между собой четыре таких сумматора, и «полный сумматор» готов. Здесь он, к примеру, считает, сколько будет 13 плюс 5, в двоичной системе — 1101 плюс 101:



Пожалуй, это был чересчур долгий процесс, зато мы действительно создали счетную машину, способную складывать числа от 0 до 15!

Таким образом, мы с помощью простых логических вентилей уже представили важную способность компьютеров, а именно вычисления. Но можно было бы еще, к примеру, хранить где-нибудь только что полученный результат, чтобы потом снова к нему обращаться. Такой накопитель тоже можно представить с помощью логики. Точнее говоря, мы нарисуем так называемые триггеры, которые хранят определенное состояние (1 или 0) до тех пор, пока на входе не получат сигнал от схемы.

Способ работы таких триггеров — обратная связь, по-английски feedback. Это значит, что выход элемента электронной схемы снова становится входом. Естественно, это немного опасный способ — он может привести к короткому замыканию или противоречивому режиму работы, что, как мы увидим, одно и то же.



Состояние изображенного накопительного элемента — это выход q с правой стороны. Выход q' представляет собой логическую противоположность q. Оба элемента схемы — вентили НЕ ИЛИ, выражающие отрицание ИЛИ-связи; они выдают 1 только тогда, когда оба входа нулевые, и 0 в противном случае.

Предположим, что элемент находится в состоянии 0, тогда q равно 0, а q' равно 1. Для обоих входов, r и s, установлено нулевое значение. Тогда на верхнем вентиле A на входах 0 и 1, на q передается 0. Нижний вентиль B получает входящий сигнал 0 от s и еще один 0 от q, на q' выдает 1. В целом оба состояния сохраняются, даже если на входе нет сигнала.

Допустим, на s приходит импульс от схемы, короткий сигнал 1. Это приводит к следующим эффектам.

На B: 1 от s, 0 от $q \to q' = 0$.

На A: 0 от r, 0 от $q' \to q = 1$.

Это состояние сохраняется, даже если сигнал больше не поступает. Тогда происходит следующее:

На A: 0 от r, 0 от $q' \to q = 1$.

На B: 0 от s, 1 от $q \to q' = 0$.

Короткий импульс поменял местами выходные значения q и q'! Если поступит новый сигнал, ничего не поменяется: 1 от q помешает нижнему вентилю измениться.

Чтобы вернуть накопитель в состояние 0, нужно на r подать импульс 1; рассмотрим, что при этом произойдет.

На A: 1 от r, 0 от $q' \rightarrow q = 0$.

На B: 0 от s, 0 от $q \rightarrow q' = 1$.

Теперь система в нулевом состоянии и останется в нем до тех пор, пока новый сигнал на s снова не сделает q равным 1.

Тот, кто читал внимательно, может сейчас спросить, что будет, если на r и s *одновременно* поступит сигнал 1. Это означало бы, что q и q' равны 0, — но это невозможное состояние, поскольку q' всегда должно быть противоположностью q. Мы оказались в логической ситуации, когда высказывание является истинным и одновременно противоположным себе. Этого не может и не должно быть! В электротехнике триггеры всегда ограничены схемой, которая предотвращает одновременное поступление сигнала на s и r. Но в логике бывают такие конструкции, в которых и высказывание, и его противоположность одновременно являются истинными, с очень неприятными следствиями. Такие парадоксы указывают на то, что вся конструкция устроена противоречивым образом. В гл. 8 мы вплотную займемся такими опасными парадоксами.

Теперь ваша очередь. Задачка, немного похожая на ту, которая была у Джеймса Блонда, но менее опасная и без электронных схем: в подвале висит лампочка, которая включается одним из трех выключателей на первом этаже. Вам известно, что лампочка в настоящий момент выключена, и вам разрешается всего один раз спуститься в подвал, чтобы проверить, светится ли лампочка. Вы можете сколь угодно долго развлекаться с выключателями. Как узнать, который из них включает лампочку?

Глава 6

Фокус с фальшивыми деньгами,

или

Двусмысленный закон

— Подсудимый, войдите!

Судья Хериберт Бекман слушал последнее в тот день дело. Была пятница, три часа пополудни, Бекман уже радовался концу рабочей недели и по выражениям лиц сидящих рядом с ним адвоката и прокурора понимал, что они испытывают то же самое.

Дело, которое сейчас предстояло разбирать, выглядело абсолютно ясным: Фите Шнайдера, 50-летнего мелкого жулика-рецидивиста, несколько месяцев назад взяли с поличным, когда он на цветном принтере в подвале своей квартиры печатал фальшивые пятидесятки. Тысячу банкнот он аккуратно связал в пачки; плохие копии банкнот по 50 евро, которые не возьмет ни один кассир в супермаркете от Фленсбурга до Гармиш-Партенкирхена.

При задержании Фите был словоохотлив — он совершенно ничего не собирался делать с банкнотами, старый знакомый хотел забрать их на следующий день, чтобы вывезти в Восточную Европу, где, по всей видимости, надеялся найти того, кто примет деньги, явно не имеющие ни одного из многочисленных знаков защиты европейского центробанка. Но плохи банкноты или хороши — фальшивые деньги есть фальшивые деньги, за плохие копии светит такая же тюрьма, как и за хорошие.

Имя «знакомого» Фите Шнайдер задержавшим его не сообщил, не открыл он его и на последующих допросах в полицейском участке. И хотя за квартирой было установлено круглосуточное наблюдение, возле двери так и не появился человек, которого полиция могла бы задержать.

Вместо целой банды фальшивомонетчиков перед судом предстал один только Фите, и при наличии имеющихся доказательств дело пахло быстрым приговором — конец недели был чрезвычайно близок.

— Господин Шнайдер, Вы обвиняетесь в подделке денежных знаков, статья 146 Уголовного кодекса, — начал разбирательство судья Бекман. — За это полагается тюремное заключение, во всяком случае, я, принимая во внимание вашу предыдущую судимость, не вижу никаких смягчающих вину обстоятельств.

Шнайдер уставился в пол и не произнес ни слова, когда судья предъявил обвинение.

— Господин Шнайдер, посмотрите на меня, пожалуйста; соответствует ли предъявленное вам обвинение действительности, если вас, можно сказать, застали в собственном подвале рядом с работающим принтером, бойко печатавшим пятидесятиевровые банкноты?

Фите пожал плечами.

— Это не ответ, господин Шнайдер. — Бекман начал терять самообладание. — Вы должны раскрыть рот, если мы хотим всё это продолжать.

— Ну, похоже, да, — проворчал Фите.

— Что означает «ну, похоже, да»? Да или нет?

— Да, — сказал Фите, — но я не сделал ничего противозаконного.

— Ничего противозаконного? — удивленно спросил Бекман. — Вы хотите сказать, что печатали игровые деньги для вечерних партий в «Монополию»?

— Нет, — сказал Фите, — это были настоящие пятидесятки. — На слове «настоящие» прокурор и судья заухмылялись. Фите заметил это и тотчас по-настоящему возмутился: — Но это же не запрещено!

Теперь смутился судья. Не запрещено? — Послушайте, вы ведь достаточно взрослый, чтобы помнить банкноты немецких марок времен своей молодости, на которых фраза из уголовного кодекса была записана дословно: тот, кто подделывает или фальсифицирует банкноты или их приобретает…

— … и вводит в оборот, — продолжил Фите монотонным голосом, — наказывается лишением свободы на срок от двух лет.

Я знаю, это я еще помню. Многие мои коллеги раньше считали, что если они уберут предложение с банкноты, оно не будет иметь к ним отношения.

Среди слушающих раздались смешки.

— Но я не вводил пятидесятки в оборот, — продолжил Фите, — и поэтому фраза из кодекса меня не касается. Она гласит: «Тот, кто подделывает банкноты бла-бла-бла *и* вводит в оборот…» То есть тот, кто делает X и делает Y, отправляется в тюрьму. Я сделал только X, но не Y, поэтому ко мне закон не имеет отношения.

Судья в первый раз стушевался. Такой интеллектуальной изощренности он от Фите не ожидал. Бекману понадобилось несколько секунд, чтобы вернуть самообладание. — Нет, нет, нет, — наконец, произнес он, — вы не должны интерпретировать фразу по своему разумению. Она гласит: «Тот, кто подделывает или фальсифицирует банкноты, — здесь судья сделал риторическую паузу, — *или* их приобретает и вводит в оборот…». То есть тот, кто делает X или делает Y, попадает за решетку. Вы совершили X, и этого достаточно для приговора.

По залу пробежал шепот. Эта фраза, которую 80 процентов населения Германии помнит наизусть, а Майк Крюгер вообще сделал из нее шлягер, эта фраза — двусмысленна? Ее можно понять таким образом, что фальшивомонетчик останется на свободе, если он сам не распространял фальшивые банкноты?

Бекман с мольбой посмотрел на прокурора, юную Ульрике Экерт, которая во время дискуссии сидела молча. Нет ли на ее лице следов сдерживаемой улыбки? Заметила ли она, как он сейчас позорится? — Госпожа прокурор, — сказал Бекман, — Вы ведь основательно изучили дело, прежде чем представить подсудимого к ответу?

— Безусловно, — ответила Экерт с чрезвычайно дружелюбной, как заметил Бекман, улыбкой. — И конечно, нельзя просто печатать на собственном принтере фальшивые деньги на экспорт и думать, что окажешься невиновным только потому, что разделил работу с подельником.

— Но закон есть закон! — запротестовал Фите Шнайдер.

— В законе нет ничего подобного той фразе, которую вы оба сейчас так обстоятельно процитировали, — сказала прокурор.

Взгляд, который она бросила судье, однозначно говорил, что она воспринимает происходящее как повод для веселья.

— А что еще более замечательно, — продолжала Ульрике Экерт, — что там вообще никогда ничего подобного не было. В том числе в 60-е годы, когда вы оба выучили фразу наизусть.

«Теперь она еще потешается над нашим возрастом», подумал Бекман.

— Я обратилась к первоначальной формулировке статьи 146 уголовного кодекса 1872 года, — сказала прокурор. — Этой фразы нигде нет. Ее бы вообще не сделали юридической формулировкой как раз из-за той двусмысленности, которую вы показали. Сейчас я скажу вам, что в действительности написано в УК. — Экерт схватила толстые папки, лежавшие перед ней на столе, и наградила судью долгим выразительным взглядом.

— Цитирую: «Лишению свободы сроком до одного года подлежит тот, кто, во-первых, подделывает деньги с намерением пустить их в оборот или способствовать их обороту» и так далее, «во-вторых, приобретает или предлагает фальшивые деньги с таким намерением *или*, *в-третьих*, тот, кто изготавливает фальшивые деньги, которые были подделаны или приобретены на условиях номер 1 или 2, благодаря чему фальшивые деньги были пущены в оборот как подлинные». Во-первых, во-вторых *или* в-третьих. Логическое недоразумение исчерпано.

Судья Бекман тяжело вздохнул — и это упрощение, которого он так хотел? — Спасибо, госпожа прокурор, за подробное разъяснение. Итак, подсудимый, вашему случаю явно соответствует первая фраза: подделывает деньги с намерением способствовать их обороту. Или Вы хотите оспорить еще и это?

Фите Шнайдер выглядел подавленным. — То есть если бы я сказал, что печатаю деньги для собственного употребления, чтобы оклеить ими стены квартиры, то всё было бы окей?

Судья ухмыльнулся. — Мы бы вам, конечно, не поверили, но вы бы здорово усложнили нам жизнь: статья действительно говорит о том, что у вас должно быть намерение пустить фальшивые банкноты в оборот. Но благодаря вашим показаниям мы совершенно избавлены от этой сложности.

Судья Бекман с облегчением захлопнул регистратор и отчетливо произнес: — Я думаю, на заслуженные выходные мы сегодня уйдем без задержек, а вы, господин Шнайдер, проведете их уже за решеткой.

Закон — что дышло

Когда мы в повседневной жизни хотим найти тексты с четкой и однозначной логической структурой, мы обращаемся к законам. Ошибочные или противоречивые формулировки приводят здесь к тяжелым последствиям. Есть даже тенденция развивать искусство «логического немецкого юридического языка», но о ней мы поговорим позднее. Сначала мы должны немного расширить наш логический инструментарий.

Как записать логическими символами структуру якобы ошибочной статьи? Той самой, гласящей, что «тот, кто подделывает или фальсифицирует банкноты или их приобретает и вводит в оборот, наказывается лишением свободы на срок до двух лет»? Мы уже познакомились с обозначениями для полных высказываний и с символами, обозначающими связи между ними. Такие предложения, как «тот, кто подделывает банкноты», мы вообще не можем сформулировать с их помощью. Но мы можем записать «статью» следующим образом:

«Если кто-то подделывает или фальсифицирует банкноты или их приобретает и вводит в оборот, то он наказывается лишением свободы на срок от двух лет».

Давайте введем следующие обозначения.

A: «Некто подделывает или фальсифицирует банкноты».

B: «Некто приобретает подделанные или фальсифицированные банкноты».

C: «Некто вводит подделанные или фальсифицированные банкноты в оборот».

D: «Некто наказывается лишением свободы на срок от двух лет».

Тогда фразу можно записать следующим образом:

$(A \vee B \wedge C) \rightarrow D$.

Это стандартное логическое выражение? Ни в коем случае. Можно поставить сколь угодно много знаков И или ИЛИ подряд, не разделяя их скобками, но смешивать их нельзя. Ведь в зависимости от того, как именно поставить скобки, получатся совершенно разные вещи, в чем нас убеждает истинностная таблица.

A	B	C	$(A \vee B) \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
и	и	и	и	и
и	и	л	л	и
и	л	и	и	и
л	и	и	и	и
и	л	л	л	и
л	и	л	л	л
л	л	и	л	л
л	л	л	л	л

Итак, это совершенно разные предложения! Случай Фите в таблице выделен; жульническая интерпретация — в предпоследней колонке (в такой ситуации к ответственности его привлечь нельзя), а прочтение судьи — в последней (Фите однозначно получает срок).

Сначала разберемся с версией судьи, согласно которой наказывается уже сама подделка. Наш «закон» звучит так:

$(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow D$.

Но отражает ли эта формула структуру предложения? Точно сказать нельзя, особенно если учесть, что исчезла разница между «подделывает» и «фальсифицирует» (под последним понимается изменение стоимости банкноты, к примеру из купюры в 10 евро изготавливают 100 евро). Давайте предложение уточним следующим образом.

A_1: «Некто подделывает банкноты».

A_2: «Некто фальсифицирует банкноты».

B_1: «Некто приобретает поддельные банкноты».

B_2: «Некто приобретает фальсифицированные банкноты».

C_1: «Некто вводит поддельные банкноты в оборот».

C_2: «Некто вводит фальсифицированные банкноты в оборот».

Тогда закон звучит так:

$((A_1 \vee A_2) \vee ((B_1 \vee B_2) \wedge (C_1 \vee C_2))) \rightarrow D$.

Но многое из содержания фразы по-прежнему остается не проясненным. Не считая того, что слово «некто» звучит как-то странно, как незаполненный пробел, надо сказать и о том, что в логике высказываний «элементарное предложение», то есть предложение без логических связей, представляет собой черный ящик. Букве «А» абсолютно все равно, что там произошло, особенно если некто обладает каким-то свойством или совершает какое-то действие. У многих предложений в нашем примере один и тот же субъект или один и тот же предикат, но если писать только «А», это остается неочевидным.

Поэтому существует совершенно естественное дополнение к логике высказываний, именуемое логикой предикатов. Она заглядывает в черный ящик элементарного высказывания, вводя различие между субъектом высказывания и предикатом.

Возьмем, к примеру, знаменитое выражение «хорошие девочки отправляются на небеса, а плохие — куда захотят» (заглавие книги Уте Эрхардт). В логике высказываний мы можем сформулировать его только как A И B, где A — «хорошие девочки отправляются на небеса», а B — «плохие девочки отправляются, куда захотят».

Логика предикатов формулирует высказывание гораздо более подробно, поскольку прежде всего выделяет отдельные предикаты:

Mx: «x — девочка».

Gx: «x хорошее».

$\neg Gx$: «x плохое» (можно, конечно, поспорить, является ли плохое противоположностью хорошего, но пока давайте считать, что так оно и есть).

Hx: «x отправляется на небеса».

$\ddot{U}x$: «x отправляется, куда хочет».

Тогда всё предложение выглядит так:

$$((Mx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \wedge ((Mx \wedge \neg Gx) \rightarrow \ddot{U}x).$$

Но дело еще не сделано: поскольку x обозначает не конкретное лицо, а переменную, выражение Mx, к примеру, вообще не является высказыванием, только *формой* высказывания. Высказыванием предложение становится только тогда, когда вместо переменной x мы возьмем определенное лицо. Если, например, обозначить Марию буквой m, то Mm значит «Мария — девочка».

Но в данном случае мы хотим строить высказывание не для Марии, Андреа или любого другого конкретного человека, а для *всех* девочек. Для этого в логике предикатов есть так называемый «квантор всеобщности». Он обозначается заглавной перевернутой буквой «А» и читается как «для всех». Пример:

$$\forall x\ (Mx \rightarrow Gx).$$

Это читается так: «для всех x: если x — девочка, то x хорошая» или в переводе на нормальный язык «все девочки хорошие».

Подставим квантор в длинное выражение, которое мы составили выше:

$$\forall x\ (((Mx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \wedge ((Mx \wedge \neg Gx) \rightarrow \ddot{U}x)).$$

В словосочетание «куда угодно» тоже закралось высказывание со словом «всё» — его, наверное, тоже можно формализовать? Конечно, можно. В предикат, естественно, может входить больше одной переменной, поэтому мы можем, к примеру, ввести такое обозначение:

Kxy: «x отправляется в y».

Если вместо x мы снова поставим Марию, сокращенно m, а вместо y — небеса, сокращенно h, то предложение Kmh будет означать «Мария отправляется на небеса». Если же мы захотим выразить фразу «Мария отправляется куда угодно», то мы напишем:

$$\forall y\ (Kmy).$$

Выражение в скобках — всегда то, к которому относится квантор всеобщности, он, так сказать, «связан» с переменной y, в то время как m — это постоянная (Мария).

Итак, фразу про девочек можно записать так:

$$\forall x\ (((Mx \wedge Gx) \rightarrow Kxh) \wedge ((Mx \wedge \neg Gx) \rightarrow \forall y\ (Kxy))).$$

А вот это уже замечательно упакованное выражение из логики предикатов! Из него можно даже вывести, что плохие девочки тоже могут отправляться на небеса. Раз в последнем выражении y обозначает всё что угодно, можно считать, что $y = h$, а Kxh относится ко всем девочкам, в том числе и к плохим.

У квантора всеобщности есть еще братец — квантор существования, он обозначается перевернутой буквой E. Если квантор всеобщности утверждает, что для всех x выполняются условия определенной формулы, то квантор существования говорит: есть (минимум) *одно значение* x, для которого высказывание является истинным. Например, предложение

$\exists x\ (Mx \wedge Gx)$

читается так: «есть минимум одно значение x, при котором x — девочка и к тому же хорошая». Или так: «есть хорошие девочки».

Квантор всеобщности и квантор существования состоят между собой в интересном отношении: для любого предиката Px всегда справедливы четыре эквивалентности:

$\forall x\ (Px) :: \neg\exists x\ (\neg \mathrm{Px})$

(«все девочки — хорошие» — то же самое, что и «нет плохой девочки»);

$\neg\forall x\ (Px) :: \exists x(\neg Px)$

(фраза «не все девочки хороши» равносильна утверждению «есть плохая девочка»);

$\exists x\ (Px) :: \neg\forall x(\neg Px)$

(«есть хорошие девочки» — «не все девочки плохие»);

$\neg\exists x\ (Px) :: \forall x(\neg Px)$

(«нет хорошей девочки» — «все девочки плохи»).

Эти четыре правила называются «отрицаниями кванторов» (QN).

Теперь мы можем, наконец, вернуться к статье о подделке денег и снабдить ее кванторами и предикатами. Для этого определим следующие предикаты:

Mx: «x — человек».

Ny: «y — поддельная банкнота».

Vy: «y — фальсифицированная банкнота».

Pxy: «x производит y».

Bxy: «x приобретает y».

Uxy: «x вводит y в оборот».

Gx: «x отправляется в тюрьму минимум на два года».

А теперь глубокий вдох, и предложение появляется!

$$\forall x \forall y \, (((Mx \wedge (Ny \vee Vy)) \wedge (Pxy \vee (Bxy \wedge Uxy))) \rightarrow Gx).$$

Вот что оно означает: «для всех значений x и y справедливо: если x — человек, а y — подделанная или фальсифицированная банкнота, то x отправляется в тюрьму минимум на два года, если x производит y или приобретает y и вводит y в оборот».

Условие «x — человек» на первый взгляд, возможно, кажется немного странным («А кто же иначе?»), но оно важно, чтобы точно определить, из каких областей можно брать значения для x и y, поскольку фраза «для всех x» действительно охватывает все сущее во вселенной.

Действительно ли надо формулировать законы столь педантично? Конечно, наш уголовный кодекс ни в коей мере не является сборником формул, таких цепочек из символов, как наша. Ни один человек, в том числе ни один юрист, не сможет их нормально читать. Но тексты законов должны быть так построены логически, чтобы их можно было перевести на формальный язык без неясностей или противоречий. С недавних пор тексты законов тестируют при помощи компьютерных систем, которые могут делать выводы в определенных рамках и проверять юридические аргументы. Для этого два швейцарских исследователя — Штефан Хёфлер и Александра Бюнцли из университета Цюриха — изобрели искусственный язык под названием «Controlled Legal German» (CLG). Он, с одной стороны, понятен для неспециалистов, в том числе юристов, которые могут его читать, а с другой стороны, в нем преодолена двусмысленность нашего естественного языка. Это, так сказать, подмножество немецкого языка: структура предложения упрощена и стандартизирована, слов меньше, а каждый термин определен строже, чем в обыденной речи. Как только закон сформулирован на этом языке, его можно однозначно записать средствами логики предикатов с добавлением таких формулировок, как «разрешается», «требуется», «запрещается».

Двусмысленные формулировки мы замечаем не всегда. Вот пример из законов федерального суда Швейцарии: «Опубликование решений осуществляется *по обычаю* в анонимной форме». Словосочетание «по обычаю» в этом предложении фактически может иметь два противоположных значения: во-первых, «всегда, и это освящено обычаем», во-вторых, «обычно так, но исключения возможны». Вас смутило это слово при первом прочтении? Думаю, что нет. В искусственном языке CLG есть четкое правило: словосочетание «*по обычаю*» означает, что исключения возможны.

Еще одним примером служат личные местоимения: «Кантоны могут учреждать специализированные высшие учебные заведения. Они обладают правом самоуправления». Каждому человеку понятно, что слово «они» относится к учебным заведениям, а не к кантонам. Но в формально однозначном языке нет места интерпретациям, поэтому в CLG личные местоимения относятся только к подлежащему предыдущего предложения, т. е. в данном случае к кантонам. Если имеется в виду что-то другое, нужно повторять термин и писать: «Специализированные высшие учебные заведения обладают правом самоуправления».

Логика предикатов совершенно естественным образом охватывает всю логику высказываний. Все правила логического вывода, которые мы знаем из логики высказываний, можно перенести в логику предикатов, добавив еще пару правил для обоих кванторов.

Давайте посмотрим, к примеру, на самый знаменитый из логических силлогизмов (правильных умозаключений), известных еще с античных времен:

1) все люди смертны;
2) Сократ — человек;
3) следовательно, Сократ смертен.

Средствами логики предикатов его можно выразить так:

$\forall x\ (Mx \rightarrow Sx),\ Ms : Ss.$

Mx здесь обозначает «x — человек», Sx — «x смертен», s — Сократа. Но как этот силлогизм доказать?

Нам понадобится новое правило логического вывода, так называемая «универсальная подстановка» (UE). Правило просто утверждает, что предложение, которое справедливо для всех значений x, справедливо также для каждого конкретного x. Мысль совершенно тривиальная, легко выводимая из наших знаний о кванторах, она помогает формальному преобразованию цепочек из символов. Теперь силлогизм о Сократе выглядит так:

1) $\forall x\,(Mx \to Sx)$;
2) Ms;
3) $Ms \to Ss$ (1 UE);
4) Ss (2, 3 MP).

После подстановки переменной x из общей формулы получен частный случай, который легко разбирается при помощи хорошо нам знакомого утверждающего модуса.

Давайте поразмышляем над более сложным примером.

1. Грудные дети нелогичны.
2. Мы не пренебрегаем тем, кто может справиться с крокодилом.
3. Мы пренебрегаем нелогичными.
4. Следовательно, грудные дети не могут справиться с крокодилом.

Сначала обозначим предикаты: Sx — «x — грудной ребенок», Ux — «x нелогичен», Kx — «x справляется с крокодилом», Vx — «мы пренебрегаем x». Тогда всё умозаключение выглядит следующим образом:

$\forall x\,(Sx \to Ux)$, $\neg\exists x\,(Kx \wedge Vx)$, $\forall x\,(Ux \to Vx)$: $\forall x\,(Sx \to \neg Kx)$.

Тот, кто терпеть не может формул, доказательство может пропустить.

1. $\forall x\,(Sx \to Ux)$.
2. $\neg\exists x\,(Kx \wedge Vx)$.
3. $\forall x\,(Ux \to Vx)$.

Для начала избавимся от отрицания квантора существования во второй строке с помощью отрицания кванторов. «Нет никого, кем мы пренебрегаем и кто может справиться с крокодилом» — то же самое, что и «для всех людей неверно, что они могут справиться с крокодилом и мы ими пренебрегаем».

4. $\forall x\,\neg(Kx \wedge Vx)$ (2 QN).

Теперь все высказывания содержат квантор всеобщности, и к выражению внутри скобок можно применять правила логики высказываний, в первую очередь правило де Моргана:

5. $\forall x\ (\neg Kx \vee \neg Vx)$ (4 DM).

А это новый повод для применения правила импликации:

6. $\forall x\ (Vx \to \neg Kx)$ (5 impl).

Теперь у нас есть цепочка импликаций, которую мы можем собрать с помощью гипотетического силлогизма:

7. $\forall x\ (Sx \to Vx)$ (1, 3 HS).
8. $\forall x\ (Sx \to \neg Kx)$ (7, 6 HS).

И вот оно — наше утверждение! При этом надо отметить, что, согласно предложению 7, мы пренебрегаем всеми грудными детьми, с чем я лично как отец совершенно не согласен.

Доказательства в логике предикатов несколько сложнее, чем в логике высказываний. С кванторами можно легко запутаться и получить «умозаключение» вроде такого:

1) все люди смертны;
2) Сократ смертен;
3) следовательно, Сократ — человек.

Хотя последнее высказывание верно для Сократа, весь вывод ошибочен; в этом легко убедиться, если заменить Сократа на мою собачку Фифи.

В логике предикатов невозможно ограничиваться синтаксическими доказательствами, когда составляют полную истинностную таблицу и с ее помощью решают задачу. Для высказываний с кванторами это не работает, поскольку квантор всеобщности в условии превращает одно высказывание в бесконечное множество. Поэтому вопрос, является ли логика предикатов полной, то есть можно ли ее средствами формально доказать любое истинное положение, совсем не тривиальный. Логика предикатов действительно полна, но доказал это Курт Гёдель только в 1929 г. Но с помощью одной лишь логики предикатов еще нельзя заниматься математикой. Математикам нужны важные понятия вроде «множества» и «числа» и операции сложения и умножения. И как только эти понятия вводят, все становится гораздо сложнее. Уже через два года после того, как Гёдель доказал полноту логики предикатов, он же вдребезги разнес всякую надежду на то, что математика когда-нибудь станет полной — в ней обязательно есть истинные утверждения, которые нельзя доказать. О том, как Гёдель к этому пришел, рассказывает гл. 10.

Теперь ваша очередь. Даны следующие высказывания:

1. Ни одна акула не сомневается в том, что она хорошо вооружена.
2. Рыба, которая не умеет танцевать кадриль, заслуживает сострадания.
3. Ни одна рыба не чувствует себя вооруженной, если у нее нет по меньшей мере трех рядов зубов.
4. Все рыбы, за исключением акул, ласковы с детьми.
5. Крупные рыбы не умеют танцевать кадриль.
6. Рыбы с зубами в три ряда не заслуживают сострадания.

Исходя из этих посылок докажите следующее предложение: «Все крупные рыбы ласковы с детьми».

Глава 7

Решение задач 2,
или
Остров лжецов

Добро пожаловать на экзотический остров Мендачино! Это удивительный остров: здесь живут два вида людей — одни всегда говорят истину, другие постоянно лгут. Назовем их «правдорубами» и «лжецами». Внешне они друг от друга не отличаются. Вы встречаете одного или нескольких обитателей острова и должны либо узнать, к какой группе относятся ваши собеседники, либо выяснить у них определенную информацию, изначально не зная, с кем вы говорите: с правдорубом или лжецом.

Мы не будем сейчас выяснять, действительно ли можно постоянно лгать в реальной жизни или, что еще более сложно, постоянно говорить правду. В конце концов, странное поведение островитян всех делает правдорубами: нужно только в начале разговора спросить, имеет ли треугольник три угла, и с этого момента становится понятным, с каким человеком имеют дело, а дальше можно правильно расценивать его ответы. Никто не мог бы больше хранить тайну своей принадлежности — социальная стратификация общества распалась бы в кратчайший срок.

В наших задачках нужно получить логический вывод из кажущихся неполными условий. В этой главе я хочу показать вам метод, с помощью которого вы сможете почти автоматически решить любую из этих задач. Метод не работает, если на острове слишком много жителей (см. задания 7 и 8) или задание сформулировано открыто, то есть если вы сами должны найти вопрос, который выведет вас на правильную дорогу.

Самая известная из всех загадок о лжецах является как раз таким открытым заданием.

1. Вы прибываете на Мендачино и хотите посетить главную деревню. Вы добираетесь до перекрестка, а указателя нет. Вы замечаете дремлющего на солнышке местного жителя и, конечно, не знаете, кто он — правдоруб или лжец. Вам разрешено задать ему всего один вопрос и по ответу выбрать правильный путь к столице.

Если вы еще не знаете решения, можете решать прямо сейчас — ответы на все задачи даны в конце книги!

А теперь перейдем к тем задачам, которые решаются по шаблону. Предположим, вы встретили двух местных жителей, Арни и Беллу. «Кто из вас относится к правдорубам, а кто к лжецам?», спрашиваете вы. Арни отвечает: «Или я лжец, или Белла — правдоруб». Так кто из них кто?

Чтобы решить задачу, сначала надо ее немного формализовать. Пусть предикат Wx означает «x — правдоруб». Для лжецов отдельный предикат вводить не надо — лжец есть не-правдоруб, в такой ситуации можно использовать $\neg Wx$. Если житель a говорит «b — лжец», то мы пишем

a: «$\neg Wb$».

Если я встретил двух жителей, то всего существует четыре комбинации их правдивости — как в истинностной таблице для двух высказываний. Вообще, для n мендачинцев имеется 2^n возможных комбинаций.

Сначала мы разберемся, в каких из четырех случаев высказывание Арни истинно. «Или» мы интерпретируем как логическое, не исключающее ИЛИ.

Wa	Wb	$\neg Wa \vee Wb$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Это вполне привычная истинностная таблица. Теперь мы должны сделать следующий шаг в размышлениях. Посмотрим, к примеру, на вторую строчку таблицы: там Арни солгал, а в строке значится, что Арни — правдоруб, а Белла — лжец. Но ведь правдоруб не может лгать, так что этот вариант отпадает, мы назовем его «несогласующимся». Можно проверить все четыре случая и прийти к выводу, что из четырех возможных случаев три не согласуются с условиями.

Wa	Wb	$\neg Wa \vee Wb$	согласуется?
и	и	и	да
и	л	л	нет
л	и	и	нет
л	л	и	нет

А это значит, что три случая отпадают, остается только одна возможная комбинация. Арни и Белла оба правдорубы.

Теперь вам придется поломать голову. Ниже даны несколько задач, которые можно решить с помощью метода полных истинностных таблиц. В конце книги есть ответы!

2. Вы встретили островитянина, назовем его Чарли. «Кто ты — правдоруб или лжец?» «Да я съем свои носки, если я правдоруб!» Не рискует ли он носками?
3. Вы встретили двух мендачинцев, Дениса и Элен, которые сидели на лавочке, флиртуя и воркуя (между обоими племенами нет вражды, только романтические отношения — после тестового вопроса каждый знает, кем является его собеседник). «Эй, к какому племени вы принадлежите?», спрашиваете вы обоих. Денис отвечает: «Если Элен — правдоруб, то я — лжец». Кем являются Денис и Элен?
4. В этот раз вы встречаете трио островитян: Фрица, Джину и Хайке. На вопрос, кто они, Фриц, смеясь, отвечает: «Мы все лжецы!» Двое других тоже присоединяются к его смеху, а когда Джина замечает ваше непонимающее лицо, она говорит: «Нет, на самом деле кто-то один из нас — правдоруб». После этого все трое снова закатываются истерическим смехом.
5. Вы встречаете другую троицу — Инго, Дженни и Курта. Вы разговариваете с ними по отдельности и начинаете с Инго: «Ты — правдоруб или лжец?» Но у Инго проблемы с речью, его шепелявый ответ вам непонятен. «Что сказал

Инго?», спрашиваете вы у Дженни. «Инго сказал, что он лжец», отвечает она. «Не верьте Дженни, она лжет!», вмешивается Курт. «А что насчет Инго?» «Он сказал правду!», отвечает Курт.

6. В баре вы встречаете трех женщин: Лолу, Мими и Нину, которые вам приветливо кивают. «Дамы, кто вы?», спрашиваете вы. На двусмысленность вопроса, к счастью, ни одна из троих не обращает внимания. «Мими и Нина — такие же, как и я», отвечает Лола. После секундного раздумья вы спрашиваете Нину: «Лола и Мими — такие же, как вы?» Что ответила Нина?

А теперь еще два задания, которые нельзя решить с помощью полной истинностной таблицы — для нее потребуется 2^{100} строк, а это 31-значное число!

7. На Мендачино живет ровно 100 человек. Вы спрашиваете первого встречного, сколько из них лжецов. «Один», отвечает он. Вы идете дальше и встречаете другого местного жителя. На тот же самый вопрос он отвечает: «Два». И так продолжается дальше, пока вы, наконец, не добираетесь до последнего жителя, который отвечает вам: «Сотня!» Так сколько все-таки на острове лжецов?
8. Та же самая ситуация, но первый отвечает: «Минимум один». Второй: «Минимум два». А последний — «Минимум сто». Сколько лжецов живет на острове в этом случае?

Глава 8

Каталог каталогов,
или
Как порядка может стать слишком много

Литература! Кафка! Хемингуэй! Целый день среди книг! Так мечтала Лена Хорнс, когда училась на ассистента библиотекаря, точнее, на «сотрудника информационной и медиа-службы», как это называется по-новонемецки. На первом постоянном рабочем месте в городской библиотеке ее действительно целый день окружали книги. И разумеется, редко выдавалась возможность заглянуть в них даже мельком. Печатные труды на ее столе, хотя и выглядели как книги, были каталогами. Конечно, не каталогами Отто или Некерманна, а библиотечными каталогами — перечнями книг.

Само собой разумеется, теперь все существует в электронном виде, перечни можно найти через Интернет, поиск по ключевым словам доступен в любых фондах, даже Публичной библиотеки Нью-Йорка. Изучение того, как объединение в электронную сеть может сделать доступным содержание многочисленных архивов и спасти их от пыли окончательного забвения, было ключевым пунктом образования Лены. Но ее шеф, Фред Колльман, был библиотекарем старой закалки. Он любил каталоги: альбомные каталоги, картотечные каталоги, предметные каталоги, каталоги микрофильмов… На замечание Лены о том, что все они совершенно непрактичны и давно устарели, библиотекарь, взглянув на нее поверх своих очков, ответил: — Да, но если поиск в Интернете ничего не дает, то у нас всегда есть наши старые добрые каталоги!

Недавно каталогомания Колльмана обострилась. Он захотел составить нечто такое, что другие сотрудники про себя называли «каталогом каталогов», а официально — «Перечнем каталогов и инвентарных списков городской библиотеки Нойенбурга». В центральной библиотеке за это ответственное задание, поворчав, взялась Лена Хорн, а в каждой из 13 городских библиотек, включая школьные, был выделен специальный сотрудник для изучения фондов по каталогам.

На прошлой неделе истек срок, к которому Колльману должны были предоставить перечни каталогов из всех библиотек города. Всего через пять дней прибыли последние запоздавшие отчеты. На столе у Лены лежали стопкой 13 списков. Каждый филиал составил внушительный свод имеющихся у них в наличии картотек и перечней, а также вариантов доступа к электронным архивам. Последние дни Лена провела за их изучением, вычеркивая повторения и пытаясь собрать каталоги каталогов в суперкаталог каталогов. В последний включались не только все поступления в каталоги городских библиотек, но и сами эти каталоги — ведь Колльман не был бы Колльманом, если бы не настоял на том, чтобы библиотеки потом сохранили перечни для тех заинтересованных, которые хотели бы обратиться к местным каталогам.

Лена постоянно ощущала бессмысленность происходящего: большинство библиотек ограничилось тем, что составили список из имеющихся у них каталогов и отправили в центральную библиотеку. Три книгохранилища — Лена про себя назвала их «снобами» — пополнили этот список еще одной единицей — своей частью городского каталога каталогов. И что ей со всем этим делать? Боясь ошибиться, Лена решила спросить совета у самого начальника.

Он встретил ее с улыбкой, полной ожидания: — Госпожа Хорн, как дела? Как продвигается ваша работа с каталогами? Вы получили все отчеты в срок?

— Да, с этим все в порядке, — ответила Лена. — Но насчет самого дела… Я не знаю, как мне поступить. Должны ли городские библиотеки сами вести свои каталоги?

— Для меня как библиотекаря и эксперта по каталогам, — заявил Колльман, бросив на Лену хорошо известный ей взгляд поверх очков, который был призван подчеркнуть его компетентность, — дело ясное: перечни потом будут находиться в соответствующих библиотеках, т.е. будут относиться к их фондам, и тогда вести списки дальше будут сами библиотеки.

— Да, но…, — попыталась вставить Лена.

— Никаких но! Это же чистой воды логика! — Колльман пресек протест в зародыше. — Неполный каталог — это не каталог! Я детально проверю его. Но для этого мне нужно сначала взглянуть, что и как сделали отдельные городские библиотеки.

Ага, подумала Лена, а заодно он хочет узнать, кто из библиотекарей страдает снобизмом, а кто нет.

— Список? — неуверенно спросила она.

— Да, список. Перечень. Каталог, если хотите. — На последней фразе лицо Колльмана расплылось в широкой улыбке, а Лена не понимала: то ли он сейчас пошутил, то ли мысль о дальнейшей работе с каталогом приводила его в восторг.

— То есть вам нужен каталог всех каталогов для каталогов в Нойенбурге, которые при этом учитывают и сами себя? — все еще сомневалась она.

— Да, именно! — ответил Колльман. — И конечно, еще каталог всех каталогов для каталогов, которые при этом не учитывают сами себя. — Библиотекарю ничего не стоило произнести эту фразу без запинки. — И сделайте это, пожалуйста, сегодня после обеда. Я хотел бы поскорее завершить эту работу.

Уже три часа спустя Лена снова стояла возле его рабочего стола. Подмышкой она держала две тоненькие папочки.

— Но вам необязательно снова приходить ко мне с этим, — сказал Колльман, который тучей нависал над горой важных документов. На мониторе у него Лена увидела партию в солитер — именно для этого шеф использовал дорогой компьютер, который совсем недавно благосклонно принял от руководства. Колльман никогда раньше не казался настолько погруженным в работу…

— Я тоже так думала, но без решения одного вопроса не могу двигаться дальше, — сказала Лена. Увидев его вопросительный взгляд, она продолжила. — Один перечень я подготовила сравнительно быстро: каталог всех каталогов для каталогов, которые содержат сами себя — таких ровно три штуки.

— А, от проницательных коллег, приписавших славу создания нового каталога себе?

— Именно, — ответила Лена. — Тяжелее пришлось со вторым списком. Его пришлось назвать «каталогом всех каталогов для каталогов, которые сами себя не содержат», иначе это был бы уже практически наш каталог каталогов, за вычетом трех упомянутых.

— Я не хотел нагружать Вас работой сверх необходимого, — улыбнулся Колльман. А он вообще видит проблему? Лена не была в этом уверена.

— Итак, я просто свела воедино десять каталогов для каталогов городских библиотек, которые не сделали этого сами.

— Хорошо. — Колльман немного нервничал. Наверное, хотел закончить партию до окончания рабочего дня. — И в чем проблема?

— Я спросила себя, должна ли я включать в этот общий свод тот каталог, который только что составила.

— Какой каталог?

— Каталог всех каталогов для каталогов, которые сами себя не содержат, — пробормотала Лена. Похоже, для одного разговора она слишком часто употребляет слово «каталог».

— Хм… — Колльман на секунду задумался. — Речь ведь не идет о давно существующем каталоге — мы хотим ввести единые правила, по которым будут созданы каталоги в каждой городской библиотеке, а они дальше будут сами вести свои списки. Тогда место останется пустым. Но до тех пор, пока этой передачи не произошло, эта вещь — тоже каталог, и поэтому должна быть включена в перечень. Впишите ее в список!

— Но в какой? — беспомощно спросила Лена. — Я уже пробовала: поскольку он сам себя не учитывает, я вносила его в него самого, если я могу так выразиться. В тот самый каталог всех каталогов для каталогов, которые не содержат в перечне сами себя. Но с этого момента каталог включает сам себя в перечень — и поэтому попадает в список каталогов для каталогов, которые сами себя содержат.

— Список тех самых трех?

— Именно в него. Я вносила его туда — и следовательно, должна была вычеркнуть его из него самого, поскольку он больше не удовлетворял критерию не включения себя самого.

Колльман нахмурился в глубоких раздумьях, которые с каждой секундой становились всё глубже. Наконец, он понял проблему.

— Сейчас каталог больше не содержит сам себя — значит, он может больше не стоять в коротком списке, правильно?

— Да.

— И значит, он снова должен попасть в другой список?

— Правильно.

— Значит, он опять включает сам себя… и мы снова оказались там, откуда пришли.

Колльман встал из-за стола и начал беспокойно ходить по комнате. Эксперт по каталогам столкнулся с профессиональной проблемой, которую явно не мог решить.

— Знаете что, — сказал он наконец, — дайте мне обе папки. Мы будем называть их не каталогами, а просто… списками. Тогда они не будут принадлежать ни к одной из групп, и проблема разрешится.

Лена, уже предвкушавшая радости окончания рабочего дня, с таким решением согласилась.

— Только еще один вопрос, господин Колльман…

— Ну что еще?

— Должны ли мы учитывать мнение снобов… э, тех трех книгохранилищ, что каталог каталогов должен включать сам себя? Не случится ли так, что мы снова получим проблему?

— Как так? Что за проблема? — спросил Колльман. — К каталогу всех каталогов относится и сам этот каталог. Но главное — каталоги никогда не будут полными. — Пока он это говорил, Колльман выключил компьютер, взял портфель и накинул пальто.

— Спасибо, госпожа Хорн, — сказал он озадаченной ассистентке, прощаясь, — после стольких размышлений мы заслуженно можем идти домой.

Роковая весть для Фреге

Оба библиотекаря смогли разрешить свою проблему относительно элегантно (вопрос, может ли каталог включать сам себя, не совсем праздный — мы позже к нему еще вернемся!). А вот в логике и математике похожая проблема привела к разброду и шатаниям.

Наш пример опирается на парадокс брадобрея, который использовал математик Бертран Рассел (1872–1970) в 1901 г. в качестве иллюстрации к открытой им антиномии. В маленьком городе живет ровно один брадобрей. Все мужчины города придают большое значение гладкому бритью, и поэтому либо сами бреются, либо ходят к брадобрею. Иначе говоря, брадобрей бреет тех людей, которые сами не бреются. А теперь вопрос: кто бреет брадобрея?

Аналог нашей истории мы можем увидеть в следующем противоречии: предположим, что брадобрей сам себя не бреет. Но из этого следует, что его бреет брадобрей. А это, в свою очередь означает, что он бреет сам себя. То есть если он не может бриться у брадобрея, то он сам себя не бреет… и так далее, туда и обратно без конца и однозначного вывода.

Настоящая антиномия Рассела относилась, конечно, не к брадобрею и не каталогам, а к математической теории множеств, которую разработал за несколько десятилетий до этого немецкий математик Георг Кантор. Теория множеств на рубеже XIX–XX столетий была одним из важнейших математических трендов; в ней видели новое основание, на котором можно воздвигнуть здание всех математических дисциплин. А поскольку практически все математические дисциплины базируются на операциях с числами, в первую очередь нужно было получить из теории множеств возможность оперировать целыми числами, то есть арифметику. Немецкий логик и арифметик Готтлоб Фреге (1848–1925 гг.) как раз только завершил второй том своих «Оснований арифметики», когда ему пришло письмо от Рассела, в котором была изложена эта антиномия.

Для Фреге это сообщение должно было стать чудовищным ударом — труд его жизни был разбит вдребезги. Он уже ничего не мог переписать в самой книге, но добавил к ней краткое послесловие: «Ученому едва ли может встретиться нечто более неожиданное, чем разрушение фундамента всего здания после завершения работы. Я оказался в этой ситуации из-за письма господина Бертрана Рассела, когда публикация этого тома уже близилась к завершению…»

Возможно, вы сейчас спрашиваете себя: зачем я все это рассказываю? Здесь ведь речь идет о проблемах математики, а эта книга — по логике. Что общего у логики с теорией множеств?

На самом деле очень много. Каждое высказывание из логики предикатов можно интерпретировать как высказывание о множествах. Возьмем силлогизм «все люди смертны, Сократ — человек, следовательно, Сократ смертен». На язык теории множеств это умозаключение переводится так: «множество людей является подмножеством смертных существ, Сократ — элемент множества людей, следовательно, Сократ — элемент множества смертных существ».

Если вы изучали теорию множеств в 60–70-х годах в школе и помните только, как рисовали цветными карандашами кружки вокруг яблок и груш, не понимая при этом смысла происходящего, то будьте уверены: именно в этом и состоит суть теории множеств. Обвести кружком несколько объектов — значит объединить объекты в группу, то есть в множество. Это действительно самая основополагающая математическая операция; поразительно, сколько всего интересного можно извлечь из этой процедуры.

Вместо того чтобы рисовать кружочки для обозначения принадлежности объекта множеству, в математике используют фигурные скобки. Например, мы можем составить множество M из трех элементов:

$M = \{$Леди Гага, Италия, квадратный корень из 2$\}$.

То, что объект является элементом множества, записывается так:

Леди Гага $\in M$.

Элементами множества могут быть все объекты реального или духовного мира, если понятно, о чем именно говорится. В свою очередь, множества могут быть элементами других множеств.

Пока число элементов множества конечно, их можно перечислять по порядку, но в противном случае придется что-то придумывать. Множества могут содержать бесконечно много элементов, что обозначается многоточием:

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Многоточие здесь читается «и так далее до бесконечности».

А еще можно (и тут мы наконец приблизились к логике) определить свойство и затем ввести множество всех объектов, обладающих данным свойством:

$B = \{x \mid x$ есть или был президентом ФРГ$\}$.

Это читается так: «B есть множество всех x, для которых справедливо: x есть или был президентом ФРГ». В этом множестве 11 элементов (к моменту опубликования данной книги, в последнее время многие перестали за этим следить), от Теодора Хойса до Иоахима Гаука.

Определяемые таким образом множества могут иметь бесконечно много элементов или, по обстоятельствам, вообще ни одного, как, например, следующее:

$F = \{x \mid x$ есть или был президентом ФРГ и x — женщина$\}$.

В этом случае F представляет собой пустое множество, которое ничего не содержит и обозначается символом $\varnothing$.

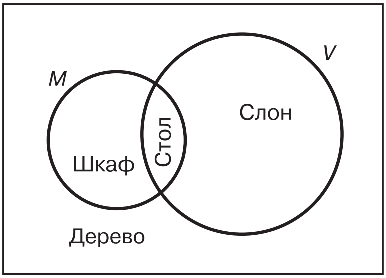
Возможность определять множества таким способом (то есть выделять требующееся свойство, а затем множество всех объектов с этим свойством) была центральной аксиомой (положением, не требующим доказательств) в теории множеств, которую Фреге развил в своей книге, он назвал ее «всеобщей аксиомой включения». Именно к этой аксиоме обратился Рассел, чтобы дискредитировать всю теорию множеств.

Свойство, которое определяет множество, можно рассматривать как логический предикат. Если предикат «x есть человек» обозначить Mx, то можно легко построить множество всех людей:

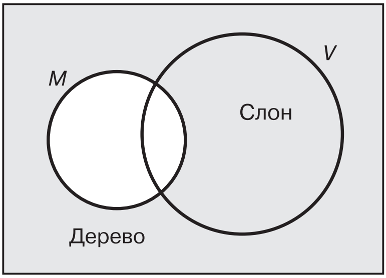
$M = \{x \mid Mx\}$.

Логическое высказывание Ms («Сократ — человек») в теории множеств записывается как $s \in M$.

Когда рассматривают два множества, один отдельный элемент может входить в одно из множеств или в оба, или наоборот, не входить ни в одно. В общем случае удобно представлять множества на рисунке, на котором каждая из четырех отдельных областей может содержать или не содержать какие-то элементы. Возьмем для примера множество M всей мебели и множество V всех четвероногих.



Для каждой из четырех областей я указал по одному элементу. Если множество M определить через предикат Mx («x есть предмет мебели»), а множество V — через предикат Vx («x имеет четыре ноги»), то можно легко изобразить дополнение к M, то есть множество всех элементов, которые не принадлежат M, соответственно не имеют свойства Mx. Итак, определим множество всего, что не мебель.

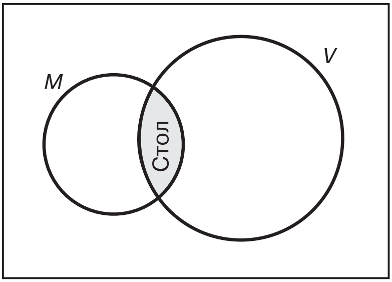


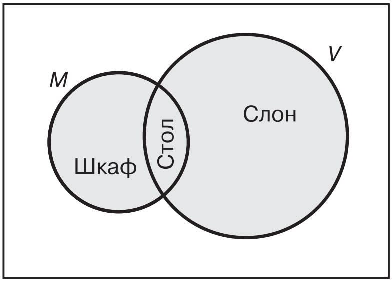
$$M' = \{x \mid x \notin M\},$$

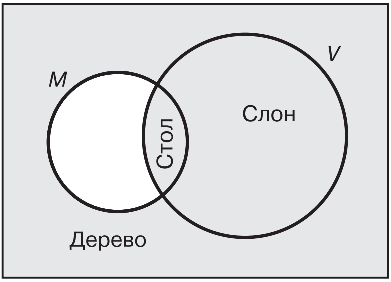
или, что то же самое,

$$M' = \{x \mid \neg Mx\}.$$

Четыре ограниченных области, на которые распадается мир всех объектов, можно соотнести друг с другом 16 различными способами — и это в точности соответствует 16 логическим операторам между двумя высказываниями (см. гл. 2). Посмотрим, к примеру, на следующие три множества.







В первом случае выделены все элементы, которые принадлежат как M, так и V, — это мебель на четырех ножках. В теории множеств эту операцию называют пересечением — она соответствует И-связи в логике:

$$M \cap V = \{x \,|\, Mx \wedge Vx\}.$$

Ни в коем случае не путайте значки для пересечения и И-связи!

Второе множество — это объединение элементов из M и V в новое множество — всё то, что является мебелью или имеет четыре ноги. Эта операция соответствует ИЛИ-связи в логике — неисключающему ИЛИ:

$$M \cup V = \{x \,|\, Mx \vee Vx\}.$$

Как можно описать третье множество? Выделена область всех элементов, которые не относятся исключительно к M. Они не являются не четырехногой мебелью. Иначе говоря, принадлежат НЕ-M или V. Назовем это множество C:

$$C = \{x \,|\, \neg Mx \vee Vx\} = \{x \,|\, Mx \rightarrow Vx\}.$$

Последнее преобразование сделано по правилу импликации (см. гл. 2). Выделенная область — это те значения x, для которых справедливо утверждение: если они являются мебелью, то у них четыре ноги.

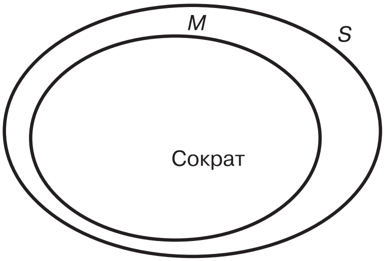
Здесь мы снова натолкнулись на некоторое противоречие нашей интуиции и определения логического следствия. Возможно, данное множество лучше описать так: оно состоит из элементов, которые либо не являются мебелью, либо если являются, то у них четыре ноги.

Кванторы из логики предикатов без проблем переводятся на язык теории множеств. Возьмем, к примеру, квантор существования:

$$\exists x \; (Mx \wedge Vx).$$

Это высказывание «есть мебель на четырех ножках». На языке теории множеств — «пересечение множеств M и V не является пустым множеством».

Классический силлогизм о смертном Сократе можно изобразить в виде диаграммы.



Фраза «Все люди смертны» означает, что каждый элемент множества M (люди) принадлежит также и множеству S (смертные). В теории множеств говорят еще, что M — это подмножество S и записывают это $M \subset S$. А из того факта, что Сократ является элементом множества M, следует, что он является также элементом множества S.

Истоки теории множеств можно назвать «наивными», поскольку термины «множество» и «элемент» используются без всяких определений; точно так же древний грек Евклид в своей геометрии рассуждал о «точках» и «прямых» и апеллировал к очевидности. Но в конце XIX – начале XX столетия математикам захотелось поставить свою науку на полностью формальный фундамент аксиом. Вместо очевидности появилось слово «исчисление». Это значит, что был определен фундаментальный набор использующихся символов, для них установили пару правил о том, какие комбинации символов представляют собой верные формулы и как можно одну комбинацию символов преобразовать в другую. Кроме того, были сформулированы так называемые аксиомы — такие комбинации символов, истинность которых принимается на веру. Это делали в надежде, что исчисление свободно от противоречий, то есть с его помощью нельзя вывести положение и одновременно его полную противоположность. Ведь в противоречивой системе можно доказать *любую* бессмыслицу.

Книга Готтлоба Фреге была как раз таким аксиоматическим обоснованием теории множеств и построенной на ней арифметики. Письмо Рассела пришло как раз тогда, когда Фреге завершил работу. Одной из принятых им аксиом была уже упоминавшаяся «всеобщая аксиома включения». Она гласит: для любого предиката Px можно определить множество всех объектов, которые обладают этим свойством. Способ записи логических операторов и множеств выглядел своеобразно; в современной нотации аксиома записывается так:

$$\exists y\ \forall x\ ((x \in y) \leftrightarrow Px).$$

Существует множество[1] y, в котором для всех x справедливо: x является элементом y, если x обладает свойством P.

Обратите внимание: речь не идет о том, что это множество действительно содержит какие-либо элементы. Например, можно в качестве P выбрать свойство «x есть внеземное существо». Тогда аксиома гласит, что я могу составить множество всех внеземных существ, хотя вполне возможно, что это пустое множество.

На первый взгляд аксиома выглядит очень безобидно. И все же после открытия Рассела она не давала покоя Фреге. Он написал в послесловии: «Я никогда не скрою от себя, что эта аксиома не так очевидна, как другие, и как это должно быть характерно для логического закона. Я бы отрекся от этого положения, если бы знал, чем его заменить». Другими словами, ему было плохо, но он нуждался в правиле, чтобы вывести формальную арифметику.

Чтобы сконструировать свою антиномию, Рассел выбрал совершенно особое свойство, к которому затем применил аксиому — свойство «x не включает сам себя как элемент». Это свойство тоже звучит совершенно безобидно и его можно отнести большому числу множеств. Множество всех стульев — не стул, множество всех людей — не человек. Но если из всех этих множеств, которые не содержат сами себя, снова сделать множество y, как это позволил Фреге, это приведет к странному выражению:

$$\forall x\ ((x \in y) \leftrightarrow (x \notin x)).$$

Это положение справедливо для *всех* объектов x во вселенной, принадлежат ли они множеству y или нет. Поэтому можно (по правилу универсальной подстановки, см. гл. 6) вместо x подставить само множество y, и тогда получится

$$(y \in y) \leftrightarrow (y \notin y).$$

---

[1] Пусть вас не смущает, что множества здесь обозначаются строчными буквами. В формальном счислении множеств нет принципиальной разницы между «множеством» и «элементом» — каждое множество может одновременно быть элементом другого множества.

То есть множество *y* является элементом *y* именно тогда, когда не является элементом *y*. Каталог всех каталогов, который не включает сам себя, учитывает сам себя именно тогда, когда сам себя не включает. Брадобрей бреется именно тогда, когда сам себя не бреет. Высказывание логически эквивалентно своей противоположности. Исчислению, которое приходит к такому результату, можно собирать вещи и уходить. Ведь легко можно убедиться, что при таком исчислении *все* высказывания являются одновременно истинными и ложными.

А как насчет других каталогов, которые господин Колльман все еще считал нормальными, — каталогов, которые включают сами себя?

Предположение, что такие множества существуют, прямо не ведет к противоречию. Но позволительно ли множеству действительно включать само себя в качестве элемента? Можно ли, например, создать «множество всех математических объектов», которое само было бы математическим объектом и включало бы само себя? И как в таком случае быть с «множеством всех множеств»?

То, что такого множества не может быть, показал уже Георг Кантор в 1899 году. Его доказательство строится на факте, что множество всех элементов множества обязательно больше, чем множество само по себе (что это значит, мы пока опустим), то есть нельзя создать множество, которое содержит все множества. Даже элементарные рассуждения показывают, что множества, включающие сами себя, создают проблему.

Предположим, что M есть множество, которое включает само себя. Тогда M можно записать следующим образом:

$$M = \{M, a, b, c, \ldots\}.$$

При этом a, b, c и так далее — определенные элементы M, их может быть конечно или бесконечно много. Тогда в правую часть можно подставить M:

$$M = \{\{ M, a, b, c, \ldots\}, a, b, c, \ldots\} =$$
$$= \{\{\{ M, a, b, c, \ldots\}, a, b, c, \ldots\}, a, b, c, \ldots\} =$$
$$= \{\{\{\{ M, a, b, c, \ldots\}, a, b, c, \ldots\}, a, b, c, \ldots\}, a, b, c, \ldots\} \ldots$$

И так далее — получается бесконечный ряд со вставленными друг в друга выражениями в скобках. Само по себе это не запрещено, бесконечность в математике часто встречается, но здесь она уже вызывает неприятное ощущение.

Как математика и логика выбрались из этого тупика? Должно быть некое основание, которое позволяло бы избежать этих антиномий и вместе с тем произвести полную и содержательную структуру современной математики.

Сам Рассел предложил так называемую «теорию типов»: математические объекты строго иерархически ранжировались, и каждый объект мог включать в качестве элемента только объекты более низких типов. При этом ни одно множество не могло включать само себя, а создание таких противоречивых супермножеств было запрещено по определению.

Тем не менее большинство математиков посчитали эту теорию, во-первых, произвольной, во-вторых, очень жесткой. Было предложено другое обоснование теории множеств — теория множеств Цермело–Френкеля, названная в честь Эрнста Цермело (1871–1953 гг.) и Абрахама Френкеля (1891–1965 гг.)[1]. В этом варианте теория множеств не предписывает жестко, какой элемент к какому может относиться. Есть и аксиома, соответствующая всеобщей аксиоме включения Фреге: для какого-либо свойства всегда можно образовать множество вещей, обладающих этим свойством, но всегда только внутри четкого надмножества. И есть аксиома, которая запрещает существование бесконечных вложенных цепочек множеств, а также чтобы множества включали сами себя в качестве элементов.

Эта аксиома называется аксиомой регулярности. Она гласит, что каждое непустое множество содержит элемент, который при пересечении с самим множеством образует пустое множество:

$$\forall x\ (x \neq \varnothing \rightarrow \exists y\ ((y \in x) \wedge (x \cap y = \varnothing))).$$

Оба указанные выше множества, которые содержат сами себя, нарушают эту аксиому: можно создать множество $M_1 = \{M\}$, которое содержит только один элемент. А пересечение множеств M и M_1 содержит M, поэтому M содержит само себя.

[1] Аксиомы и правила этой теории множеств вы найдете в приложении «Инструменты мышления».

Рассуждения, которые привели к разрушению наивной теории множеств и ее новому аксиоматическому обоснованию, для рубежа XIX–XX веков были новыми и революционными, но парадоксы, на которых они основаны, были частично известны с давних времен. Аргументы Кантора о невозможности создать множество всех множеств являются уточненной формой онтологического доказательства бытия Бога, предложенного Ансельмом Кентерберийским в XI веке (см. гл. 1). Ансельм рассуждал так: если можно помыслить нечто такое, что больше того, больше чего невозможно помыслить, тогда то, больше чего невозможно помыслить, является тем, больше чего можно помыслить. В изложении Кантора получается так: если более мощное множество существует в качестве множества всех множеств (например, множество своих подмножеств), то оно не может быть множеством всех множеств. Так что к выводу о существовании Бога Кантор не пришел бы, хотя и был горячо верующим человеком.

В следующей главе я подобрал для вас небольшой компендиум парадоксов, некоторые из них известны уже несколько тысячелетий.

Глава 9

Когда логика сходит с ума,
или
Знаменитые парадоксы и их решения

Великие умы были рады парадоксам еще со времен античности. Как известно, уже философ Зенон из Элеи знал сорок из них, десять из его парадоксов дошли до нашего времени, и о двух из них вы сможете прочитать ниже.

Парадокс — это история, которая заводит наше мышление на гладкий лед. Она начинается очень бесхитростно и затем приходит к результату, который не согласуется с нашим здравым смыслом или даже приходит к двум диаметрально противоположным результатам, а оба, конечно, не могут быть истинными.

Не все, что называется парадоксом, действительно является поводом для обольщения логикой. Есть, к примеру, так называемый «парадокс дня рождения»: сколько человек должно быть на вечеринке, чтобы вероятность того, что двое из них родились в один день, была больше, чем 50%? Число удивительно маленькое: достаточно уже 23 человек; но многие люди предложат в качестве ответа значительно большее число. Возможно потому, что поставленный вопрос путают с другим — какова вероятность того, что два человека родились в *определенный* день, — но речь идет вообще-то о любом дне. Парадокса здесь на самом деле нет, эта задачка просто демонстрирует, что наша интуиция в вопросе определения вероятности событий не слишком развита.

Хиты парадоксов, представленные ниже, не всегда строго логические. Но поскольку нелогические парадоксы тоже заводят наше мышление на гладкий лед, я решил включить их в список.

Ахиллес и черепаха

История про Ахиллеса и черепаху, наверное, самый известный из парадоксов Зенона Элейского. Она повествует о великом Ахиллесе и невзрачной черепахе. Герой Троянской войны и рептилия соревнуются в беге, но поскольку Ахиллес бегает намного быстрее, он дает черепахе фору. Зенон утверждает, что Ахиллес в такой ситуации вообще никогда не догонит черепаху: из-за форы она уже немного впереди. Когда Ахиллес пробежит этот отрезок, черепаха продвинется еще немного вперед. И так далее — разрыв будет все время уменьшаться, но герой всегда будет достигать лишь последней отметки черепахи, на которой ее уже не будет.

Сегодня этот парадокс больше не смущает умы большинства людей. Давайте попробуем произвести расчеты на основании примера: пусть скорость Ахиллеса равна 10 метрам в секунду, что соответствует возможностям хорошего спринтера. Черепаха же может передвигаться со скоростью 10 сантиметров в секунду. Предположим, она получила фору в 100 метров.

Итак, гонка началась, и через 10 секунд Ахиллес уже на точке старта черепахи, которая тем временем продвинулась на 1 метр и находится на расстоянии 101 метр от старта. Для преодоления этого метра Ахиллесу нужна одна десятая секунды, за которую черепаха проползет 1 сантиметр. Его Ахиллес пробежит за 1 тысячную секунды… и так далее. Если мы суммируем эти временные отрезки, получится следующее выражение:

$$10 + 0{,}1 + 0{,}001 + 0{,}000\,01 + \ldots = 10{,}101\,010\,101\ldots \text{ (секунд).}$$

А точка, в которой Ахиллес догонит черепаху, лежит не так далеко от 100-метровой отметки:

$$100 + 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + \ldots = 101{,}010\,10\ldots \text{ (метров).}$$

Сегодня такие вычисления с многоточиями не представляют никаких трудностей. Они встречаются в математическом анализе, анализе бесконечно малых величин, благодаря которому можно спокойно складывать *бесконечное* множество чисел, получая при этом *конечную* сумму. Но методы анализа были открыты только в XVII веке, а для древних греков представление о том, что результатом сложения бесконечно многих чисел будет конечная сумма, было по меньшей мере необычным.

Ахиллес поступит правильно, если не будет долго останавливаться на этих размышлениях: если он каждый раз, когда достигает предыдущего результата черепахи, будет тормозить всего лишь на одну миллионную секунды, то действительно никогда не догонит свою соперницу.

Парадокс всемогущества

Этот парадокс представляет собой очередную попытку вести религиозные дебаты с помощью логики; по опыту, таким образом в вопросах веры можно продвинуться не слишком далеко. Речь идет не о доказательстве бытия Бога, а наоборот, о возможности доказать, что Он не существует, точнее говоря, о невозможности существования всемогущего Бога. Суть вопроса: если Господь всемогущ, может ли он создать настолько тяжелый камень, что Сам не сможет его поднять?

Структурно этот парадокс очень напоминает множество всех множеств, которое не содержит себя в качестве одного из элементов (см. гл. 8). Логически его можно сформулировать следующим образом (на полностью формальной записи я сэкономлю).

Обозначим всемогущее Существо буквой a. Тогда выполняются два утверждения:

1. Для всех камней x справедливо: a может поднять x.
2. Для всех существ y справедливо: a может создать камень x, поднять который y не может.

(Между прочим, второе утверждение абсолютно ясно доказывает, что может быть только одно всемогущее существо; всемогущий Бог есть только в монотеистических религиях, в других верованиях боги неполноценны и даже воюют друг с другом!)

Дальше будем действовать точно так же, как Бертран Рассел, и подставим во второе утверждение a вместо y. Тогда для некоторого камня x:

по утверждению 1, a может поднять x;

по утверждению 2, a не может поднять x.

Из исходных посылок следует положение и его полная противоположность. С точки зрения чистой логики, приговор можно вынести прямо сейчас: из противоречащих посылок может следовать все что угодно, поэтому условия недопустимы. Означает ли это, что антиномия Рассела может подрывать основы теологии так же, как теорию множеств?

Едва ли. Теологи и философы сотни лет обсуждали эту проблему и предлагали различные варианты ее решения. В конце концов, речь ведь идет о том, чтобы сделать всемогущего Бога *логически невозможным* существом. Вместо камня Ему можно дать другое задание: построить четырехугольный треугольник или указать простое число, делящееся на 4. Поэтому мне больше всего нравится ответ схоластического упрямца: существо, сначала создавшее законы логики, само собой разумеется, может с ними не считаться и создать камень, который не может поднять.

Парадокс Берри

Этот парадокс впервые упомянул Бертран Рассел, который приписал его открытие оксфордскому библиотекарю Дж. Дж. Берри. Объект парадокса — некое таинственное число:

> *самое маленькое из натуральных чисел, которое нельзя описать менее чем двенадцатью словами*.

Теперь ход размышлений: английский или немецкий[1] язык содержит конечное число слов. Поэтому число комбинаций, включающих менее двенадцати слов, конечно. Некоторые из этих комбинаций описывают числа примерно вот так: «число вершин куба» (8), «наименьшее двузначное простое число» (11), «гугол» (10^{100}). Числа можно описывать при помощи разных цепочек слов. Во всяком случае есть много чисел, для описания которых требуется больше 12 слов. Из оставшихся чисел (по так называемой теореме о полной упорядоченности) можно выбрать наименьшее — *самое маленькое из натуральных чисел, которое нельзя описать менее чем двенадцатью словами.* Но это выражение состоит ровно из 12 слов, поэтому такое число — не то, о чем эти слова говорят. Значит, все числа можно описать 12 словами или меньшим их количеством.

К описанию этого парадокса стоит, правда, добавить, что в немецком языке он не так легко срабатывает, как в английском. Мы

---

[1] Или русский. — *Прим. перев.*

ведь записываем чуть ли не миллион чисел в одно слово: например, dreihundertvierundsechzigtausendsiebenhunderteinundzwanzig[1]. Поэтому любое число банально записывается одним словом. Хотя в немецком, где можно получить сколь угодно много новых слов, соединяя имеющиеся друг с другом, число слов тоже конечно — во всяком случае в этом меня уверил один лингвист.

Предположим, что полный словарь содержит миллион слов, тогда имеется $1\,000\,000^{12}$ комбинаций, в которые входит больше одиннадцати слов, а это 10^{72} штук — невообразимо огромное число (хотя меньше, чем число атомов во вселенной). Большая их часть — бессмыслица, существенная часть остальных не обозначает числа, но в любом случае эти комбинации охватывают все числа, которые можно описать менее чем тринадцатью словами.

Если мы будем действовать систематически, то в процессе изучения 10^{72} выражений пристально рассмотрим выражение «самое маленькое из натуральных чисел, которое нельзя описать менее чем двенадцатью словами». Какое же число подходит под данное определение? Размышления показывают, что ошибочно предположение о том, что существует однозначное отображение устных высказываний на числа. «Функция», заданная на пространстве немецкого языка, со значениями в области натуральных чисел не определена, и она не может быть определена. Несмотря на это, парадокс очень симпатичный — с его помощью можно даже, если перенести его в область формального математического исчисления, доказать знаменитую теорему Гёделя о неполноте — подробнее об этом в следующей главе!

Столь же симпатичный и родственный предложенному парадокс — **парадокс интересных чисел**: многие числа, в том числе многие очень большие числа, представляют крайний интерес. Многие из них на первый взгляд не кажутся таковыми: например, 33 550 336 является пятым совершенным[2] числом, то есть числом, равным сумме своих делителей[3]. Но даже величайший

---

[1] Это число 364 721. — *Прим. перев.*

[2] Первые четыре совершенных числа — 6, 28, 496 и 8128.

[3] За исключением самого числа. Например, число 6 равно сумме своих делителей: $1 + 2 + 3 = 6$, но при этом в сумму не включают само число 6, хотя оно, конечно же, делится на себя. — *Прим. ред.*

фанат чисел должен будет согласиться с тем, что не все числа действительно интересны. И тогда нужно снова по теореме о полной упорядоченности среди скучных чисел указать наименьшее. *Наименьшее скучное число*? Ну разве оно не интересно?!

Парадокс зенего цвета

В этой книге речь идет почти исключительно о дедуктивных умозаключениях, а не об индуктивных. Логика дедуктивна, поскольку она всегда получает свои выводы из имеющихся исходных посылок, не добавляя к ним новых фактов. Индукция же, напротив, является методом экспериментальных наук — она собирает данные окружающего мира и выдвигает гипотезы, которые затем подтверждаются или опровергаются при помощи дальнейших опытов, но никогда не могут считаться окончательно доказанными.

Однако есть пара парадоксов, которые имеют дело с индукцией и подвергают испытанию наше логическое мышление (см. также «парадокс воронов»). Один из них — «новая загадка индукции Гудмена», которую придумал американский философ Нельсон Гудмен (1906–1998). В ней ставится вопрос о возможности делать выводы о будущем на основании результатов наблюдений за прошлым — явно парадокс не для междусобойчика за коктейлем, а для серьезных научно-теоретических дебатов.

Изумруды зеленого цвета, не правда ли? Нет, изумруды *зение*. Мы определим новое свойство — *зений* цвет. Предмет, который будет найден до 1 января 2020 года, называется *зеним*, если он зеленый. А предмет, впервые открытый после 1 января 2020 года, называется *зеним*, если он синий. Аналогичным образом определяется прилагательное *силёный*.

Важно, что предмет зенего цвета не меняет свой цвет в указанный день. Речь идет только о языковой договоренности — довольно абсурдной, как, к примеру, «грабитель теперь называется твиксом».

Теперь посмотрите на два предложения:

1. Все изумруды зеленые.
2. Все изумруды зение.

Они говорят о разных вещах: первое предложение утверждает, что изумруды — зеленые безотносительно времени, когда их вытащили из недр Земли; второе предложение гласит, что изумруды, добытые до 1 января 2020 года, — зеленые, а после — синие.

А вот и сам парадокс: все изумруды, найденные до сих пор, были зелеными. Каждая следующая находка подтверждает гипотезу номер 1. Но все доселе известные изумруды являются зеними, значит, каждая находка зеленого изумруда подтверждает также гипотезу номер 2. И так будет с каким угодно фантастическим утверждением относительно изумрудов, которое ссылается на будущие открытия и для которого мы создали соответствующий термин.

Важнейшим контраргументом для построений подобного рода является «бритва Оккама» — принцип, использующийся в естественных науках с конца XVII века: если имеется несколько объяснений для какого-то положения вещей, то следует предпочитать наиболее простое из них, а именно то, которое прибегает к наименьшему количеству дополнительных предположений. В случае с изумрудами можно сказать: предположение, что после произвольно выбранной точки во времени будут находить изумруды другого цвета, высосано из пальца, для него нет никаких оснований, и поэтому гипотезу 1 мы однозначно предпочтем гипотезе 2.

Этот принцип можно также пояснить на примере рядов чисел, которые часто встречаются в тестах на интеллект или задачках на сообразительность. Требуется, к примеру, продолжить ряд 2, 4, 6… Читателю как бы внушают мысль, что в таких задачах один правильный ответ (в данном случае 8). Но математический ответ звучит совершенно иначе: ряд можно продолжить каким угодно способом — всегда найдется формула, которой последовательность будет соответствовать. Например, можно сказать, что следующее число будет 9, а каждое следующее число добавляется в ряд по формуле

$$\frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{23n}{6} - 1.$$

Подставьте в эту формулу числа 1, 2, 3 и 4, и вы убедитесь в ее правильности! Формула $2n$, конечно, выглядит проще и изящнее — согласно бритве Оккама, именно она является правильным ответом. Но вторая формула тоже правильная, и поэтому 9 — подходящее продолжение последовательности. Если вам придется вдруг решать такой тест при следующем приеме на работу, пишите все же ожидаемый ответ 8, иначе вас могут принять за идиота или (если вы поясните свое решение) за далекого от жизни педанта.

Парадокс кучи

Эта проблема, также известная под названием парадокса сорита (в переводе с древнегреческого слово «сорос» означает куча), известна с давних времен, возможно, она восходит к Зенону. Парадокс звучит следующим образом: каждый согласен с тем, что десять миллионов песчинок составляют кучу песка (вообще-то не слишком большую — где-то около пол-литра песка), кроме того, едва ли кто-то сомневается, что куча песка останется кучей песка, если из нее убрать одну песчинку. Из кучи убирают песчинку за песчинкой, но она все же остается кучей — до тех пор, пока там не остается всего одна песчинка. Но является ли она кучей?

Логический вывод о том, что единственная песчинка представляет собой кучу песка, полностью и корректно выводится из двух имеющихся посылок. Свойство для всех куч, в которых песчинок меньше n, можно доказать математически: для этого сначала доказываем для n, а потом показываем, что это свойство справедливо для $x-1$ так же, как и для x.

«Ошибка» в этом рассуждении кроется в предположении, что куча песка остается таковой, если из нее убрать песчинку. Для десяти миллионов песчинок оно, пожалуй, верно, но чем меньше количество, тем более спорным становится предположение. Если десять песчинок еще куча, то является ли кучей девять?

Если исходить из того, что языковые термины описывают классические множества, а каждое множество песчинок либо является кучей, либо не является, то нужно дать и минимальное число песчинок в куче. Если из такой кучи убрать одну песчинку, то всё, это больше не куча. Точка.

Наш язык работает, конечно, не так. Многие слова являются нечеткими в том смысле, что многие кучи однозначно остаются таковыми, когда мы в качестве минимального выбираем совсем маленькое число и применяем его к небольшим кучкам. Мир вообще не делится на кучи и не-кучи, на черное и белое, есть промежуточные стадии. И куча с каждой отнятой песчинкой все менее является кучей, и можно когда угодно, хоть при появлении одной песчинки, лишить всю совокупность данного свойства.

Есть логика, которая пытается преодолеть эту неточность нашего языка, — так называемая нечеткая логика. Подробнее об этом в гл. 13!

Парадокс смертной казни

Убийца призван к ответственности в стране, где еще действует смертная казнь. Судья говорит: «Вас могут казнить в один из дней между понедельником и субботой в полдень. Но вы не будете знать точный день до самого утра казни, когда вам неожиданно сообщит об этом палач». Приговоренный размышляет: «А что если я с понедельника по пятницу буду ждать палача, но ничего не случится? Тогда он придет в субботу и ничего неожиданного для меня в этом не будет. Поэтому суббота точно не будет днем казни; последний возможный день — это пятница. Но тогда и в пятницу не будет ничего неожиданного в том, что придет палач. Последний день — точно четверг… Так будет продолжаться вплоть до понедельника, но появление палача и тут не станет неожиданностью. Да меня вообще не казнят!» — делает вывод заключенный и поуютнее устраивается в своей камере. Его мир рушится, когда в среду утром приходит палач и совершает казнь тем же днем.

Такая вот парадоксальная история: ясно, что приговоренный сделал ошибку в рассуждениях, но какую? Приговор судьи состоял из двух высказываний:

1. Вас казнят в один из шести дней.
2. Сообщение о казни утром этого дня станет для вас неожиданным.

Сначала корректное логическое рассуждение приводит к выводу, что оба высказывания не могут быть одновременно верными — естественно, неожиданной казнь в субботу не будет.

Значит, исходная посылка 1 И 2 неверна. Но из неверной посылки, как мы уже много раз замечали в этой книге, может следовать *любой* вывод. А приговоренный решил, что высказывание 1 ложно, и его не казнят. Это задним числом делает приговор судьи субъективно корректным — преступник был бы очень удивлен, если бы палач явился к нему в субботу.

Парадокс лжецов

Этот знаменитый парадокс существует в разных вариациях, и многие из них совершенно не парадоксальны!

1. Бертран Рассел приписывает парадокс Эпимениду, жившему в VI веке до н.э.: «Эпименид Критский говорил, что все жители Крита — лжецы и что все другие утверждения критян — чистая ложь».
2. О том же самом сообщает апостол Павел в Послании к Титу (1:12): «Из них же самих один стихотворец сказал: "Критяне всегда лжецы, злые звери, утробы ленивые"».
3. Эвбулид поднял эту же проблему в IV веке до н.э.: «Если я солгал о том, что я лгу, я солгал или сказал правду?»
4. Рассел озвучил этот парадокс в самой короткой и четкой форме: «Некий человек сказал: я постоянно лгу» (по-английски «*I am lying*» — форма длительного действия, которой нет в немецком языке, придает выражению элегантность).

Чтобы пояснить, в чем здесь парадокс, нужно сначала выяснить, кого считать лжецом. В обыденной речи мы считаем таким всякого, кто говорит неправду частенько, но необязательно в каждой фразе. Если слово «лжец» понимать именно так, то высказывания о критянах (1 и 2) вовсе не парадоксальны — мы не знаем, правдиво ли высказывание Эпименида, но оно вполне может быть правдивым.

Если же мы подойдем к вопросу с позиций логики, то можем спокойно считать, что лжецом является всякий, кто говорит неправду постоянно. Тогда как выглядят высказывания Эпименида (1) или апостола (2)?

Логическая форма высказывания (предикат Lx обозначает «x есть лжец», а Kx — «x есть критянин») выглядит так:

$\forall x\,(Kx \to Lx)$.

Если высказывание истинно, то сам Эпименид является лжецом. А это значит, что высказывание ложно:

$\neg\forall x\ (Kx \rightarrow Lx)$ — это то же самое, что и $\exists x\ (Kx \wedge \neg Lx)$.

То есть существует минимум один критянин, который не лжец. Это противоречие? Нет — Эпименид сказал неправду. Он необязательно должен быть закоренелым лжецом, однократной лжи достаточно.

Парадокс явно виден в высказываниях 3 и 4. В них не говорится о критянах или других людях, только о лжи говорящего. Если обозначить все предложение A, то высказывание будет НЕ A. В краткой форме получится так:

$A \leftrightarrow \neg A$.

И это противоречит «закону противоречия», который легко выводится из логических аксиом: высказывание и его противоположность не могут быть истинными одновременно.

Имеется множество других высказываний, которые можно сформулировать, нарушая закон противоречия, например: «Снег идет и не идет». Это предложение просто-напросто ложное. Фраза о лжецах является парадоксом потому, что она связывает два высказывания: высказывание о мире (человек говорит неправду) и метавысказывание о себе самом (то, что само высказывание ложно). Метавысказывания необязательно приводят к противоречиям — я каждому высказыванию могу приделать довесок «… и это истинно», не изменяя истинностного значения. Но если высказывание таким образом начинает отменять само себя, появляется проблема. Подробности о такой самореференции вы найдете в следующей главе!

Парадокс о стреле

Это широко известный парадокс грека Зенона. В парадоксе об Ахиллесе речь шла о невозможности бесконечного деления пространства, в варианте со стрелой Зенон делает то же самое со временем. Мы наблюдаем за полетом стрелы. В каждый момент времени стрела находится в определенном месте, то есть в каждый конкретный момент она не движется, находится в состоянии покоя. Если же она постоянно находится в покое, с чего мы вообще решили, что стрела движется? Отсюда Зенон заключает, что движение — это только иллюзия. Если бы в те времена снимали фильмы, у Зенона была бы хорошая аналогия: если мы снимем полет стрелы на пленку, то получим определенное количество кадров, 25 или 30 в секунду. На каждом кадре видна статичная стрела, ничего не движется, а движение возникает у нас в голове. Согласно парадоксу Зенона, действительность является своего рода фильмом из «отдельных кадров» — о частоте их смены ничего нельзя сказать.

Подобно тому, как в парадоксе об Ахиллесе дистанция делится на бесконечно много отрезков, которые при этом имеют определенную и всегда уменьшающуюся длину, время полета стрелы Зенон делит на *моменты*, и из его аргументации становится понятно, что для него момент не имеет протяженности. Но как можно сложить эти нулевые моменты в ненулевую длительность?

На помощь снова приходит исчисление бесконечно малых величин, известное со времен Лейбница и Ньютона: скорость можно определить не только для временного интервала (в этом случае отмеряют положения стрелы в начале и в конце интервала и разность делят на его длительность). Рассматривая постоянно уменьшающиеся временные интервалы и ряд скоростей, можно вычислить предельное значение, это и будет скоростью стрелы в определенный момент времени.

Итак, классическая физика разрешила проблему, но потом пришла квантовая физика, которая снова реабилитировала Зенона. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, чем точнее я определяю место физической частицы (или всего объекта), тем неопределеннее становится ее скорость. Посредством наблюдения я воздействую на объект. Современные физики даже говорят о «квантовом эффекте Зенона» для нестабильных частиц: обычно они с определенной вероятностью распадаются за определенный период времени. Но если я постоянно наблюдаю за частицей, этот распад не происходит — как в парадоксе Зенона о стреле, действительность «замораживается», если за ней слишком пристально наблюдают.

Парадокс воронов

В этом парадоксе, впервые сформулированном логиком Карлом Густавом Гемпелем (1905–1997 гг.) в 40-х годах прошлого века, речь снова идет об индуктивном способе познания. В ходе индукции я собираю факты, которые подтверждают или опровергают гипотезу. Я могу, к примеру, выдвинуть гипотезу «все вороны — черные». Каждый раз, когда я встречаю нового черного ворона, это довод в мою пользу, но полного доказательства от реального мира получить невозможно.

Парадокс звучит следующим образом: гипотезу подтверждает не только черный ворон, но и белый ботинок, на который я наткнулся. Но почему?

Гипотеза гласит: «все вороны черные» или, что то же самое, «для всех x справедливо: если x — ворон, то x черный». Запишем ее в виде формулы:

$$\forall x\ (Rx \rightarrow Sx).$$

Здесь мы снова сталкиваемся со своенравным характером логической импликации, которая иногда противоречит нашей интуиции. Из закона контрапозиции (см. гл. 3) следует, что я могу развернуть стрелку, если буду отрицать обе части высказывания — фраза «если я держу палец в огне, на нем появится ожог» логически эквивалентна высказыванию «если на пальце нет ожога, я не держу палец в огне». Поэтому нашу гипотезу можно сформулировать так:

$$\forall x\ (\neg Sx \rightarrow \neg Rx).$$

Это означает, что «все нечерные вещи — не вороны». Поэтому, как только я нахожу нечерную вещь, которая не является вороном, например белый ботинок, исходная гипотеза немедленно получает подтверждение.

Как разрешить этот парадокс? Есть два способа, в первом признается такое логическое следствие, во втором нет.

Первый вариант проиллюстрируем примером: в мешке находится 20 маленьких фигурок животных разного цвета. По какой-нибудь причине я предполагаю, что все фигурки уток — желтые. Я не знаю, сколько уток среди фигурок и как распределены цвета. Я начинаю вынимать фигурки одну за другой. И вот я вынул уже 18 фигурок, из них 3 были утками и все они желтого цвета, что хорошо согласуется с моей гипотезой. Еще одна желтая утка подкрепила бы ее еще сильнее. Но голубая корова (и желтая заодно) тоже добавила бы камешек в фундамент моей гипотезы — просто потому, что уменьшаются шансы того, что в мешке еще остается нежелтая утка. Чем больше объектов (в данном случае видимого) мира я классифицирую, не получая опровержения своей гипотезы, тем крепче она становится.

Сам Гемпель смотрел на все это примерно таким же образом. В качестве примера он брал гипотезу «все соли натрия горят желтым пламенем». Или логический эквивалент — «то, что не горит желтым пламенем, не является солью натрия». Расширяются ли мои знания о мире в тех ситуациях, когда я засовываю в огонь сосульку и выясняю, что она не горит желтым пламенем? Да что там, она вообще не горит! Нет, говорит Гемпель, но бывает и так: я подношу пока неизвестную мне субстанцию в огонь бунзеновской горелки, пламя окрашивается синим, и химический анализ показывает, что проба не содержит солей натрия — это мою гипотезу вполне подтверждает.

Пример с вороном и ботинком говорит только о том, что белый ботинок подтверждает гипотезу намного слабее, чем черный ворон. Это даже можно просчитать с помощью определенных предположений относительно вероятности; многие логики предлагали на этот счет свои формулы.

Вторая группа попыток решения базируется на том, что логическая импликация плохо соответствует нашему пониманию содержания гипотезы. Если подойти строго логически, то высказывание «все вороны черные» верно только тогда, когда нет ни одного ворона. Тогда высказывание эквивалентно, например, такому: «все единороги белые». Это предложение истинно до тех пор, пока мы не обнаружили это мифическое существо. Но, выдвигая гипотезу, мы так не считаем, наше утверждение относится к реально существующим птицам. А это отношение нельзя описать средствами классической логики, поскольку она принципиально абстрагирована от любого содержания.

Парадокс корабля

Этот парадокс был известен еще в античности. Плутарх сформулировал его так: «Корабль, на котором Тесей отплыл с другими юношами и девушками и вернулся обратно, был галерой с 30 веслами, которую афиняне хранили вплоть до времен Деметрия

Фалерского. Время от времени они заменяли старые, прогнившие доски на новые и крепкие. Поэтому корабль служил для философов наглядным доказательством в спорах о дальнейшем развитии; одни утверждали, что корабль всегда оставался тем же самым, что и раньше, другие же говорили, что это не так».

С течением времени вещи меняются, мы их меняем. До какой степени они могут измениться, чтобы мы по-прежнему воспринимали их, как те же самые (а не только в точности такие же)? Философ Томас Гоббс (1588–1679) заострил эту проблему еще больше, предложив свой вариант: что было бы, если бы заменяемые старые доски не выбрасывали, а собирали в другом месте — они совокупно составили бы тот же самый корабль? Какой из двух кораблей все-таки является кораблем Тесея?

Именно с этой проблемой столкнулись три участницы первоначального состава британской группы «Sugababes» — их постепенно заменяли на других музыкантов, а когда исходное трио захотело, как те самые доски, вновь собрать музыкальный коллектив, суд запретил им использовать название «Sugababes». Оно окончательно перешло к новой тройке исполнительниц.

Примеров этому парадоксу в повседневной жизни можно обнаружить целое множество: река всегда та же самая, хотя вода в ней течет в каждый момент времени (философ Гераклит сказал, что невозможно дважды войти в одну и ту же реку). Человеческое тело состоит не только из молекул, но и отдельных клеток. Тот же мозг, который есть у нас сегодня, в материальном смысле совсем не тот же самый, что десять лет назад, но, несмотря на это, мы считаем, что человек — тот же самый, и не только из практических соображений. В отношении нас самих мы твердо субъективно уверены, что наша идентичность прячется в восстанавливаемом целом, а не в отдельных отбрасываемых частях. В будущем этот вопрос встанет еще жестче, когда мы начнем заменять части тела протезами, переносить собственное сознание из мозга на другой, внешний носитель. На наше счастье, вопрос о том, что произойдет, когда удастся создать структурно точную копию нашего мозга при помощи искусственных электронных схем, до сих пор остается теоретическим. Когда мы включим рубильник, проснется ли в машине та же самая личность, что и во мне? И продолжит ли она жизнь, когда сам я умру?

Парадокс корабля окончательно не решается, он тесно связан с индивидуальными представлениями об идентичности. Американский философ Теодор Сайдер предложил хитрое решение: он рассматривает мир в четырех измерениях, три из которых — пространство, а еще одно — время. Объект, который занимает определенное пространство в течение определенного промежутка времени, оставляет континуальный след в этой координатной системе из четырех измерений (эта система не совпадает с физическим пространством-временем Эйнштейна). До тех пор пока след появляется непрерывно, объект остается тем же самым, даже если его детали меняются. В этом случае новый корабль был бы тем же самым и может носить название «корабль Тесея», а вот новая копия из оригинальных досок — нет.

Парадокс конвертов

Последний пример снова имеет не логическую, а математическую природу. Тот, кто не знаком с термином «математическое ожидание», возможно, вообще не увидит ничего парадоксального.

Речь идет о телешоу, во время которого кандидат получает денежный приз. Ведущий показывает участнику два конверта и говорит, что в одном конверте в два раза больше денег, чем в другом. Кандидат раскрывает конверт и находит 100 евро. Ведущий предлагает: «Если хотите, Вы можете выбрать другой конверт».

Участник шоу рассуждает следующим образом: «Если я остановлю свой выбор на имеющемся конверте — выиграю 100 евро. Если я выберу другой, то с вероятностью 50% я получу 200 евро или 50 евро. В среднем это 125 евро, то есть однозначно больше, чем у меня сейчас — поэтому точно меняю!»

Но если обмен всегда имеет смысл, почему бы участнику перед вскрытием конверта еще раз не поменять конверты? И почему вообще подобные рассуждения не приводят к противоположному решению?

Здесь кроется чисто математическая ошибка. Предположение, что второй конверт с одинаковой вероятностью содержит 50 или 200 евро, не так однозначно. Не все возможности от нуля до бесконечности имеют равные шансы на осуществление, я должен знать точное распределение вероятностей. У шоу есть определенный бюджет, в который его создатели должны укладываться (в современных телешоу это точно больше 200 евро), и чем ближе верхняя планка бюджета, тем менее вероятно, что в конверте лежит большая сумма. И наоборот, никто не захочет отделаться от победителя суммой в 2,5 евро, поэтому заниженные ожидания тоже маловероятны. Только когда такое распределение вероятностей сделано, можно прикидывать свои шансы и разрабатывать стратегию выбора разных вариантов. Эти расчеты выходят за рамки данной книги — мы ведь должны здесь рассказывать о чисто логических задачах.

Глава 10

Эта надпись ссылается сама на себя,

или

Задачи с козами на острове лжецов

На острове лжецов Мендачино (см. гл. 7), конечно, тоже есть телезрители. Мы помним, что на острове живут люди двух типов, которые внешне не различаются. Одни говорят только правду, другие — только ложь. Мы называем их правдорубами и лжецами.

«Мендачино ТВ», сокращенно МТВ, организует полноформатное вещание: новости, сериалы, шоу и спортивные трансляции. Когда решили, что ведущими могут быть только правдорубы, произошло небольшое восстание. Лжецы сначала запротестовали против явной дискриминации, но потом заметили, что не слишком удобно отрицать в голове каждую фразу, которую произносят ведущие. Поэтому для лжецов придумали кучу профессий, не требующих появления на экране.

И еще пара замечаний на тему общественной жизни на Мендачино: практически каждый знает про других, к какому типу они относятся. А если не знает, мгновенно выясняет это с помощью тестового вопроса вроде «Два плюс два будет четыре?». Кроме того, не каждая фраза лжеца ложна. Они ведь должны говорить мяснику «Фунт мяса, пожалуйста!», друг другу на улице «Привет!» и спрашивать в ресторане «Можно мне сахар?». Они лгут только в высказываниях, которые могут быть истинными или ложными.

Одна из наиболее популярных передач на МТВ — телешоу «Горячий приз». Кульминации оно достигает в тот момент, когда кандидат стоит перед двумя или тремя дверями, одну из которых должен выбрать. За одной из них находится главный приз, за другими радостно мемекают козы. Цель шоу, естественно, состоит в том, чтобы совершенно сбить с толку претендента и наградить его хохотом публики, когда он выберет неправильную дверь.

Некоторые читатели, возможно, сейчас предположили, что им сейчас покажут новый вариант известной задачи с козой[1]. Но та задача с козой — на расчет вероятностей, т. е. она математическая, а на МТВ-шоу речь идет о чисто логических решениях, в которых важнейшую роль играет особенность демографии на Мендачино.

Ведущая «Горячего приза» — горячо любимая всеми местными жителями Бабзи Шёнвальд, как и все другие ведущие, она правдоруб. Не меньшими симпатиями пользуются оба ее ассистента, Ханс и Франц, один из которых высокий и худой, а другой — низенький и полный. При этом Ханс — правдоруб, а Франц — лжец. Гвоздь программы — подсказки, которые Ханс и Франц дают кандидату (они-то знают, за какой из дверей приз, а за какой — коза). Подсказки такие: ассистенты прикрепляют на дверь табличку, на которой написана фраза. И конечно, Ханс и Франц следуют особенностям своей природы: если Ханс пишет предложение на табличке, оно истинно, если Франц — ложно. А кандидат при этом не знает, кто из них какую табличку написал.

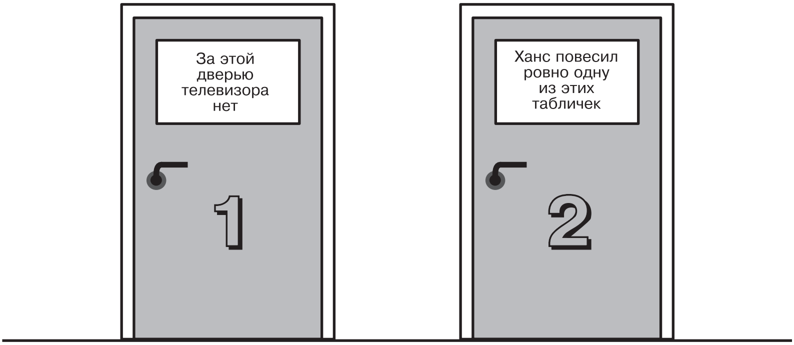
Сегодня в шоу участвует Бернд Вайсброт, простодушный правдоруб из деревни на юге острова. Он уже выполнил несколько шутливых заданий, и шоу подходит к кульминации.

— Ты просто супер! — заливается белокурая Бабзи Шёнвальд. — Осталось еще два задания, и ты получишь главный приз! В первом задании ты можешь выиграть 47-дюймовый LCD-телевизор. Он может подключаться к интернету, в нем есть встроенная задняя подсветка. Телевизор предоставлен фирмой «MC Electronics». — Спонсоров, конечно, забывать нельзя. — Телевизор находится за одной из двух дверей. А Ханс и Франц снова повесят таблички на двери. Итак, вперед!

---

1 В этой задаче кандидат должен выбрать одну из трех дверей. Он выбирает, а ведущий открывает одну из двух других дверей, за которой была спрятана коза, и спрашивает еще раз, не передумал ли участник. Должен ли он придерживаться своего первоначального решения или лучше выбрать третью дверь? В действительности решение лучше поменять. Некоторые в это не верят, но об этой задаче написаны уже целые книги, например «Задача с козами» Геро фон Рандова (вышла в издательстве Rowohlt в 1992 г.).

Занавес поднимается.



По рядам зрителей побежал шепот — опять одна из этих мудреных логических загадок! На лбу у Вайсброта выступили капли пота, но кандидат не теряет самообладания. Сюда бы листок бумаги и карандаш, чтобы составить схему со всеми возможными истинностными значениями!

Но это все равно нужно сделать, думает он. Предположим, что Ханс повесил табличку на дверь 2. Тогда надпись на ней верная, а табличка на двери 1 принадлежит Францу. Но Франц лжет, поэтому предложение на двери 1 ложно, и телевизор спрятан именно за ней!

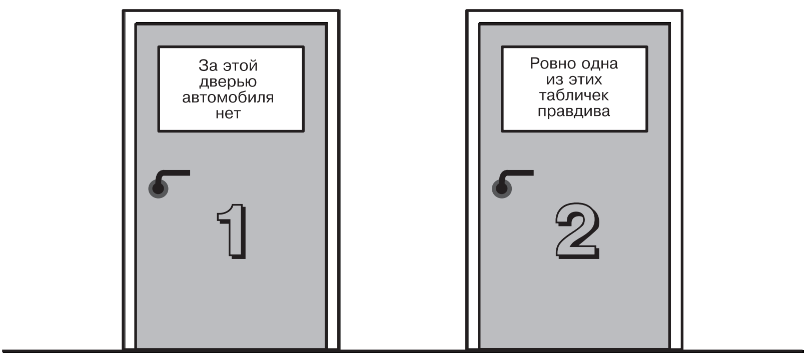
И только Вайсброт захотел озвучить свой ответ, как ему пришла в голову мысль проверить себя для большей уверенности. Что, если Франц повесил табличку на дверь 2? Тогда предложение на ней ложно, и Ханс не вешал эту табличку. Поскольку Ханс не мог сделать обе таблички (та, что на двери 2, принадлежит Францу), он вообще ни одной ни написал — надпись на двери 1 тоже сделал Франц. И мы приходим к тому же ответу, что и в первом случае. Хотя вопрос об авторе второй таблички остается открытым, на решение это никак не влияет!

— Я выбираю дверь 1! — говорит Бернд Вайсброт уверенно.

Публика замерла, когда Бабзи Шёнвальд подошла к двери. Она выдержала паузу, повернулась к Вайсброту и подмигнула ему. — Итак, давайте посмотрим… — Она распахнула дверь 1, за которой на блестящей серебряной подставке действительно красовался телевизор. Публика зааплодировала, Вайсброт расслабился, ведущая объявила короткий перерыв на рекламу, пошел ролик фирмы «MC Electronics».

После рекламы прозвучали знакомые фанфары, три прожектора нацелились на претендента, ведущую и занавес, за которым во время перерыва произошли изменения: поставили новый приз, не забыли козу, а Ханс и Франц подготовили свои таблички. — И вот, напряжение достигло критической точки! — Бабзи Шёнвальд перешла на визг. — Ты выиграл уже целую кучу призов, Бернд, но сейчас тебе предстоит побороться за абсолютный суперглавный приз. Ты можешь выиграть автомобиль с кожаным салоном, встроенным навигатором, автоматическим пуском двигателя и разными другими наворотами! — Показывают короткий демонстрационный ролик, а затем всеобщее внимание сосредоточивается на Бернде Вайсброте. — Бернд, вот твое задание!

Барабанная дробь, занавес открывается, и Бернд снова видит две двери.



— Секундочку, — думает он, — разве это не та же ситуация, что и раньше? На двери 1 написано практически то же самое, что и в предыдущем задании, и то, что значится на двери 2, выглядит очень знакомо. Значит, здесь какой-то подвох.

Напряжение участника из-за главного приза только возросло, но ему и сейчас удается оставаться спокойным и думать логически. Предположим, рассуждает он, что табличку на дверь 2 повесил Ханс, и предложение верно. Тогда предложение на двери 1 ложно, табличку вешал Франц, и машина — за дверью 1!

Но и в этот раз Бернд решил потратить время на проверку. Что, если табличку на дверь 2 повесил Франц? Тогда предложение ложно, не ровно одна табличка говорит правду. Значит, предложение на двери 1 является ложным, табличку вешал Франц — и машина снова за дверью 1.

Лицо Бернда Вайсброта расплылось в улыбке. Машина ему нравилась! Он не стал ждать, что будет делать ведущая, спрыгнул со своего кресла, подошел к дверям, распахнул первую — и увидел приветливо мемекающую козу.

— Но… этого не может быть! — воскликнул Вайсброт. — Моя логика безупречна! Машина должна была быть за дверью 1! Это обман! Вы мне за это ответите!

Но режиссер уже пустил финальные титры, музыка стала громче, камера повернулась к радостно улыбающейся Бабзи Шёнвальд, которая попрощалась со зрителями до следующей передачи. А на заднем плане видно, как Ханс вышел из-за кулис и пытается мягко увести со сцены все еще разъяренного участника. Франц стоит поблизости и бросает Вайсброту совершенно демонические взгляды.

Об истинности и доказательности

Что, ради всего святого, Бернд Вайсброт сделал неправильно? Где прячется его логическая ошибка? Хитрость, конечно, в высказывании на второй двери: «Ровно одна из этих табличек правдива». Это предложение ссылается само на себя, то есть самореферентно; это значит, что оно сообщает нам о своей собственной истинности. Такие предложения создают в логике некоторые проблемы, а их рассмотрение представляет собой жуткое буквоедство. Самореферентные предложения в прошлом веке дважды потрясли математику: в первый раз в 1903 году, когда Рассел создал антиномию, в которой показал, что множества нельзя составлять «наивным» способом (см. гл. 8). И только математики подлатали свою теорию и освободились от противоречий, как в 1931 году появился Курт Гёдель и вновь показал им с помощью самореферентного предложения, что надежда на создание такого математического фундамента, с помощью которого можно подтвердить или опровергнуть любую формулу, была чистой воды иллюзией.

Как понять открытие Гёделя, возможно, самое значительное в математике XX века, я хочу вам пояснить в этой главе. Я знаю, что много на себя беру — пристегните ремни, мы поднимаемся на огромную логическую высоту!

Но начнем мы с совершенно простых языковых игр. Парадокс брадобрея после лекций в последних главах вас, наверное, не слишком шокировал. Если абстрагироваться от метафор бритья, речь идет о том, что человек утверждает, что в данный момент он лжет. Или (редуцируем еще дальше) предложение утверждает свою собственную ложность:

Это предложение ложно.

Логическими символами эта фраза записывается так:

$A \leftrightarrow \neg A.$

Если предложение истинно, оно ложно, а если ложно, то истинно. Парадоксальность можно оставить несколько в стороне и создать петлю из двух предложений, переплетенных друг с другом. Это все равно, что на одной стороне визитки напечатать

Предложение на другой стороне — истинно

А если визитку перевернуть, то там будет написано

Предложение на другой стороне — ложно

Этому соответствуют две логические формулы:

$A \leftrightarrow B;$

$B \leftrightarrow \neg A.$

Смотрите-ка, здесь снова A равносильно НЕ A, но только кружным путем, через эквивалентность B. Если начать цепочку с B, можно сделать вывод, что предложение равнозначно своей противоположности.

Все эти предложения связаны друг с другом: они составляют только утверждение о своей собственной истинности и не имеют никакого отношения к чему-либо в окружающей действительности. Истинностное значение определяется только из самого этого высказывания. Так кошка кусает себя за хвост. Логик Раймонд Смаллиан, у которого позаимствованы многие примеры для этой книги, называет предложения, имеющие отношение к объективным фактам, «обоснованными» (*well-grounded*). Так, предложение «Ханс написал ровно одно из этих предложений» обоснованное, поскольку повествует о свершившемся в прошлом событии, которое либо состоялось, либо нет. А предложение «Ровно одна из этих табличек говорит правду», вообще говоря, не является обоснованным — все зависит от обоснованности предложения на *другой* табличке.

Не каждое необоснованное предложение должно вести к противоречивым логическим петлям. В последнем задании телешоу господин Вайсброт дал табличкам однозначную логическую интерпретацию: машина находится за дверью 1, табличку на дверь 1 повесил Франц, на ней ложное высказывание. А табличку на дверь 2 мог поместить и Ханс, и Франц, значит, она могла быть и истинной, и ложной.

Но что если Ханс повесил табличку на дверь 1 и машина скрывается за дверью 2? Тогда предложение на двери 2 является истинным, если оно ложно, и ложным, если оно истинно. Вопрос: кто мог бы написать такую табличку? Оба, утверждаю я, исходя из подробного изложения условий нашей истории: высказывания Ханса являются истинными, *если их истинность предрешена* — иначе он говорит разные фразы вроде «Добрый день!», «Есть еще кофе?» и может утверждать парадоксальные вещи. И каждый из двоих ассистентов мог с удовольствием написать вторую табличку.

Самореферентные предложения можно использовать для доказательства любого высказывания, например что Ангела Меркель является китайской императрицей.

Если это предложение истинно, то Ангела Меркель — китайская императрица.

Обратите внимание — речь идет не обо всем высказывании, а только о второй его части!

Мы это четко докажем с помощью правил, выученных в гл. 2. A будет обозначать все предложение, B — «Ангела Меркель — китайская императрица».

1. $A \leftrightarrow (A \to B)$.

Это самообосновывающая формулировка: «это предложение» — часть себя самого.

2. $A \to A$.

Это справедливо для *какого угодно* предложения.

3. $A \to (A \to B)$.

Здесь мы к формуле 2 применили эквиваленцию из 1.

4. $A \to B$.

Предложение произведено из формулы 3 по так называемым правилам сокращения, которые справедливы для любых высказываний A и B.

5. A.

Теперь мы, по положению 1, снова $A \to B$ заменили на A. И вот мы с помощью карманных фокусов показали, что все предложение истинно! Остальное — просто детская забава: мы применим утверждающий модус к предложениям 4 и 5:

6. B.

Итак, предложение B истинно, и Ангела Меркель является императрицей Китая!

Этот пример показывает, что стоит только приотворить дверь противоречию, как немедленно наступит хаос — будет доказано любое, еще более абсурдное выражение и его противоположность за компанию. Значит, нужно построить дамбу. Может, следует вообще запретить предложения, которые сами себя обосновывают? Это было бы очень грустно — ведь некоторые из них имеют смысл, например название этой главы. Они тоже обоснованны, если описывают себя и говорят не только о своей истинности.

Но и обоснованные предложения могут привести нас к противоречиям, по крайне мере в повседневной речи. Как вам следующее предложение?

Это предложение состоит из шести слов.

Оно обоснованно — описывает проверяемый факт. И оно истинно. Сложности будут, когда мы посмотрим на отрицание этого предложения:

Это предложение не состоит из шести слов.

Посчитайте: в предложении 7 слов, значит, оно истинно. Истинно как предложение, так и его противоположность, а это классическое нарушение логического «закона противоречия». Ситуация не улучшится, если мы начнем с неправильного числа слов:

Это предложение состоит из семи слов.

Это предложение не состоит из семи слов.

Противоречие объясняется особенностью языка — предложение становится длиннее на одно слово, если в нем появляется отрицание (по крайней мере, есть такая возможность — ведь также можно сказать «Это неправда, что это предложение состоит из шести слов», и тогда мы отрицаем целых 9 слов!). Кроме того, существуют языки, которые содержат отрицание в самом глаголе — тогда число слов остается таким же, и нет никакого противоречия.

Важно помнить, что все противоречия и парадоксы, с которыми мы имели дело, не могут сильно повредить логике высказываний и логике предикатов. Во всяком случае не в том смысле, что они приводят систему к противоречию. Оно появляется только тогда, когда посредством применения аксиом и правил логического вывода можно одновременно доказать и высказывание, и его противоположность. Но с рассмотренными парадоксами не тот случай — противоречия возникают только при появлении дополнительных допущений, например в доказательстве императорского титула у Меркель A приравняли к $A \rightarrow B$. А вот антиномия Рассела в теории множеств прямо выводится из аксиомы Фреге. Эта антиномия рассматривает множество, составленное по правилам исчисления множеств, и показывает, что это множество одновременно включает и не включает само себя.

В случае с теорией множеств (и вообще с математикой) фактически удалось «починить» список аксиом, чтобы избежать противоречивости. Следующий вопрос: является ли система *полной,* то есть все ли ее истинные положения являются также доказуемыми?

Чтобы приблизиться к ответу на этот вопрос, стоит еще раз перечислить важнейшие понятия, имеющие отношение к формальным системам.

Прежде всего дадим определение *исчислению* — это не что иное, как правила работы с символами без придания им какого-либо значения. Для такой работы замечательно подходит компьютер, поскольку она не творческая и не требует мысли. Есть несколько цепочек символов, которые принимаются как данное, а также аксиомы и правила, по которым из имеющихся цепочек можно построить новые. Каждая цепочка, созданная таким способом, является тождественно истинным утверждением. Это *синтаксическая* область.

На самом деле мы не играем с символами совершенно произвольно, мы что-то под ними подразумеваем, значит, существует *интерпретация* символов. В логике высказываний символами обозначались истинные и ложные высказывания, в так называемом исчислении Пеано, которое формализует натуральные числа и вычисления с ними, — числа, но здесь этот вопрос нас не интересует.

Важно, что между *доказуемыми* и *истинными* положениями есть разница. Доказуемость — это *синтаксическое* свойство, им обладают положения, которые конструируют с помощью манипуляций символами. Истинность — это, наоборот, *семантическое* свойство. Это легко понять, если, к примеру, задуматься о том, что утверждение «есть бесконечно много простых чисел» должно быть либо истинным, либо ложным, а вот доказуемо оно или нет, — это совсем другой вопрос[1].

Есть несколько терминов для описания синтаксических и семантических свойств системы (исчисления).

- Система называется *непротиворечивой*, если положение и его отрицание не являются одновременно доказуемыми.
- Система называется *корректной*, если каждое доказуемое высказывание является истинным.
- Система называется *полной*, если каждое истинное положение является доказуемым.

Непротиворечивость — это чисто синтаксическое свойство, абсолютно необходимое для осмысленной системы, иначе в ее рамках можно будет доказать все что угодно. Здесь как раз споткнулась первоначальная теория множеств.

---

[1] Это утверждение доказуемо. Но существует ли бесконечно много простых чисел-близнецов (как 17 и 19, отличающихся на 2), до сих пор неизвестно, и никто не знает, что в итоге докажут — утверждение или его отрицание.

Если система некорректна, то исчисление порождает ложные положения — согласитесь, не слишком эффективно использовать для натуральных чисел такое исчисление, в котором 2 плюс 2 будет 5.

Что насчет полноты? Разве не следует ожидать, что каждое истинное положение является доказуемым? Или может случиться так, что среди знаменитых нерешенных математических проблем есть такие, которые *принципиально* невозможно доказать?

То, что логика высказываний обладает всеми тремя свойствами, довольно банально, поскольку даже самые сложные цепочки из элементарных высказываний можно проверить при помощи истинностной таблицы. Полноту логики предикатов доказал Курт Гёдель в 1928 году. Но три года спустя он же показал: каждая корректная и непротиворечивая система, даже такая максимально простая, как арифметика натуральных чисел, не является полной. Надежда на то, что каждую математическую истину можно доказать, исчезла окончательно.

Доказательство Гёделя построено на том, что он, так сказать, пронумеровал все математические положения, а затем построил положение, которое утверждало свою недоказуемость. Этот способ доказательства имеет много общего с парадоксом лжеца («это предложение — ложно»), но есть тонкое и важное различие, позволившее Гёделю избежать парадокса, — его положение гласит: «это положение недоказуемо». Если оно истинно, то оно доказуемо, а если ложное предложение доказуемо, то система больше не является корректной. Значит, в корректной системе положение должно быть истинным, но тогда фактически утверждается, что есть недоказуемое истинное положение.

Но сейчас я вам покажу одно доказательство, которое основано на другом парадоксе — парадоксе Берри. В нем речь идет о «*самом маленьком из натуральных чисел, которое нельзя описать менее чем тринадцатью словами*». В главе 9 мы еще могли объяснить этот парадокс тем, что высказывания естественного языка не обладают достаточной формальной силой. Но в 1989 году математик Джордж Булос перенес этот парадокс в формальный язык и таким образом доказал первую теорему Гёделя о неполноте — он тоже построил утверждение, которое является истинным, но недоказуемым.

В следующих абзацах я покажу доказательство Булоса в (почти) полной формальной записи. Оно не требует глубоких математических познаний, а тот, кто его хорошенько изучит, сможет себя поздравить с тем, что смог понять доказательство важнейшей математической теоремы XX века. Разве это не прекрасно? Тот, кто не желает испытать этот счастливый момент, может сразу перепрыгнуть к загадке в конце главы!

Чтобы вообще суметь построить истинное, но недоказуемое положение, нужно постоянно держать в голове различие между доказуемостью в формальной системе и истинностью в семантической интерпретации. В данном случае речь идет о формальной системе, которая описывает натуральные числа, и о самих натуральных числах.

Формальное описание натуральных чисел восходит к итальянскому математику Джузеппе Пеано (1858—1932). Его аксиомы работают прежде всего с понятием следующего числа. Для каждого числа x есть следующее за ним число, его обозначают sx. Ноль не следует ни за каким другим числом. Правила вычислений определяются в аксиомах. Для описания арифметики используются только следующие символы:

- уже известные логические символы: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$;
- знаки сложения и умножения: $+, \times$;
- число ноль 0;
- знаки равенства и «меньше чем»: $=, <$;
- два символа, из которых можно получить любое число вариаций: $x, x', x'', \ldots$;
- символ следования s, для числа x следующее за ним обозначается sx;
- и еще две скобки: (,).

Всего 17 символов, из которых состоят все формулы без исключения, — это важно! Все дополнительные символы, которые будут введены с этого момента, являются только сокращениями — их можно заменить другими[1].

[1] Из предыдущих глав мы знаем, что логические операторы можно свести к очень маленькому числу операций. Можно обходиться и меньшим числом символов, но тогда формулы будет тяжелее читать.

Еще одно важное замечание: кроме нуля, в этом формальном языке нет чисел — считают здесь так: 0, *s*0, *ss*0, *sss*0, … Чтобы не считать, сколько же там букв *s*, мы для краткости вместо *ssss*0 будем писать [4]. При этом помним о разнице между рядом символов [4] и числом 4, которое существует только в интерпретации системы!

Наша цель — формально определить, что мы понимаем под «самым маленьким из натуральных чисел, которое нельзя описать менее чем *k* словами». Для этого мы определим, что значит описать формулой число.

Формула — это выражение с переменной *x*. Например «$2 + x = 4$», что в формальном языке записывается так:

$ss0 + x = ssss0.$

Формула *описывает натуральное число n*, когда можно доказать, что она истинна, если вместо *x* подставить значение [*n*]. В нашем примере формула описывает число 2.

Каждая формула описывает не больше одного числа, но одно число можно описать несколькими разными формулами.

Поскольку с помощью 17 символов можно составить большое, но конечное число формальных выражений определенной длины *i* (а именно 17^i, хотя многие из них бессмысленны), понятно, что формулы длиной *i* могут описать лишь конечное количество чисел. И точно так же понятно, что чисел, описываемых формулами длины меньше *i*, тоже конечно много. Поэтому должно найтись самое маленькое число, которое описывается цепочкой из *i* символов максимум.

Эти рассуждения можно также описать на формальном языке (тем же кружным путем, которым шел Гёдель, когда пронумеровал каждую формулу «числами Гёделя»). Возьмем, к примеру, формулу *Cxz*, которая гласит, что число *x* описывается цепочкой символов длиной *z*. Дополнительно определим еще две формулы: *Bxy* гласит, что *x* можно описать формулой короче, чем из *y* символов, а *Axy* означает, что *x* — это наименьшее число, для описания которого используется по меньшей мере *y* символов.

Теперь следите за шагами доказательства: подсчитаем символы в формуле *Axy* и обозначим это число буквой *k*, оно определенно больше 3. А теперь построим новое формальное положение Fx:

$\exists y\ ((y = [10] \times [k]) \wedge Axy)$.

По-русски: «x есть наименьшее число, которое нельзя описать меньше чем $10 \times k$ символами».

Это натуральное число, разумеется, существует.

А теперь сосчитаем символы в формуле Fx. В ней много подстановок, а мы хотим выразить ее через первоначальные 17 символов:

[10] — это $ssssssssss0$, здесь 11 символов;

$[k]$, соответственно, содержит $(k + 1)$ символов;

Axy содержит k символов;

y мы должны записать как x', это два раза по два символа.

Остаток формулы состоит из 7 символов. Всего получается $2 \times k + 23$ символа. Но поскольку k больше 3,

$2 \times k + 23 < 10 \times k$.

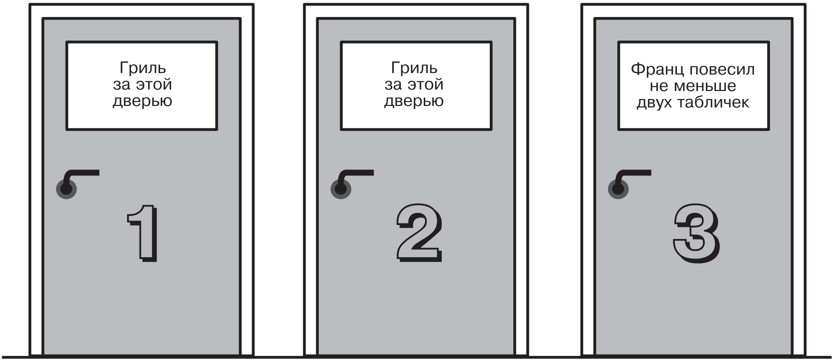
А это значит, что перед нами формула для «самого маленького из чисел, которое нельзя описать менее чем $10 \times k$ символами», которая содержит меньше чем $10 \times k$ символов!

Из этого парадокса можно сделать один из двух выводов. Первый: система несвободна от противоречий, ведь получилось доказать положение и его противоположность. Но это было бы концом математики, если в рамках системы можно доказать *одно* положение и его противоположность, то можно доказать *каждое* положение вместе с его противоположностью. В это не поверит ни один математик — все исходят из того, что после антиномии Рассела теорию множеств так «починили», что в ней больше не существует противоречий, даже если средствами самой теории это недоказуемо.

Остается второй вывод: формула Fx описывает x не в соответствии со строгим определением, то есть в рамках формальной системы она недоказуема. Но тогда мы нашли именно то, что искали, — истинное, но недоказуемое высказывание.

Это горькое открытие, но математики научились с ним жить. В их повседневной работе им еще не попадалось положение, чья недоказуемость была бы доказана. Существуют крепкие орешки, которые до сих пор сопротивляются попыткам их доказать, но каждый настоящий математик всё же верит, что творческий подход и теоретический инструментарий помогут когда-нибудь найти решение и этих сложных задач. Поэтому теорема Гёделя на практике едва ли применяется. Однако она показала, что в математике есть границы, за которые шагнуть невозможно.

Теперь ваша очередь. На Мендачино снова шоу, и в этот раз главный приз — электрогриль с кучей возможностей. Поднимается занавес, и вы видите три двери. За какой из них находится приз?



Глава 11

Решение задач 3,

или

Шоу со шляпой

Это шоу не идет по Мендачино-ТВ, и нам не говорят об истине и лжи. Тем не менее это логическое шоу, поэтому его, наверное, показывают где-нибудь по третьей программе в ночные часы. «Шоу со шляпой» — это игровое шоу, которое в компаниях игроков появляется в самых разных формах, но строится всегда на одном и том же принципе. Кандидатки и кандидаты, которые иногда играют в командах, а иногда поодиночке, носят на голове красную или черную шляпу, которую сами не могут увидеть. Задача каждого — определить, какого цвета шляпа у него на голове (на одной голове может оказаться даже две шляпы — одна на другой).

Ведущая скупа на подсказки, и основные сведения кандидаты получают в беседах с другими игроками. Обычно все участники очень хитры, их тщательно отбирают в ходе кастинга. Значит, можно исходить из того, что все способны на те логические рассуждения, которые может проводить один из них.

Бывает так, что вопрос поставлен, но некоторое время ничего больше не происходит. Иногда это длится довольно долго. Это всегда знак, что ни один из игроков в данный момент не может ответить, именно это зачастую оказывается тем решающим указанием, которого кандидату не хватало.

Для первой загадки я дам вам решение, чтобы вы познакомились с типичным ходом мысли в «Шоу со шляпой». Все остальное вы сможете решить самостоятельно, ответы даны в приложении!

1. Три кандидатки стоят друг за другом, как в полонезе: последняя может видеть шляпы двух других, средняя — только шляпу той, что впереди, а передняя не видит ни одной. Ведущая до этого показала им пять шляп, две красных и

три черных, из которых она отобрала три. Затем ведущая под крики публики объявила свое коронное «Выключите свет!» и в темноте надела на участниц шляпы. Свет снова включен, а тот, кто знает цвет своей шляпы, должен об этом сообщить. После некоторой паузы кандидатка, стоявшая впереди всех, сказала: «Моя шляпа — …!» Какого цвета была ее шляпа и как она об этом догадалась?

Решение. Назовем участниц А, В и С, причем С стоит впереди всех, А — позади всех. С рассуждает так: «Предположим, что моя шляпа — красная. Тогда В, следующая за мной, видит красную шляпу и думает: "Если моя шляпа тоже красная, то участница А, которая видит две красных шляпы, должна тотчас сказать, что ее шляпа черная. Но А ничего не сказала, значит моя шляпа черная!" Следовательно, В должна объявить, что ее шляпа — черная. Но этого не происходит, значит, моя собственная шляпа не красная, а черная». Итак, участница С говорит: «Моя шляпа черная!»

2. Следующий раунд — вариация на тему игры номер 1. Участвуют четыре кандидата, три из которых расставлены так же, как и в предыдущем задании, а четвертый стоит за занавесом и не видит шляпы других участников, а они не видят его шляпу. В этот раз у ведущей не было выбора, она распределила две черные и две красные шляпы. После того, как в студии зажегся цвет, а кандидатам было разрешено угадывать цвет своей шляпы, снова воцарилась тишина. Ее нарушил один из участников, объявивший: «У меня красная шляпа!» Кто это был?

3. На этот раз три кандидата стоят на сцене, и каждый видит остальных. В наборе для этой игры три красные и три черные шляпы; таким образом, возможны любые комбинации. Когда выключается свет, ведущая надевает каждому из трех игроков красную шляпу. Затем она объявляет: «Как только загорится свет, тот из вас, кто видит хотя бы одну красную шляпу, пусть поднимет руку. А тот, кто первым угадает цвет своей шляпы, выигрывает». Когда включили свет, все подняли руки, а после некоторой паузы хором сказали: «На мне красная шляпа!». Как они догадались?

4. Поскольку в третьей игре победитель не был выявлен, начался новый раунд. Снова кандидаты сидят в темноте, а ведущая объясняет: «У вас сейчас будет особенно тяжелая, но честная игра, чтобы однозначно определить победителя. Всего будет две красных и три черных шляпы. Как только включится свет…» Дальше она ничего объяснить не успела, поскольку трое участников хором закричали: «Моя шляпа — …!» И действительно, каждый из них точно определил цвет. Как были распределены шляпы?

5. В игре номер 4 победитель все еще не определился, поэтому сложность постепенно нарастает. На голове может оказаться не одна, а две шляпы разом! Шесть шляп были выбраны из четырех красных и четырех черных. Когда включили свет, ведущая стала спрашивать участников одного за другим, знают ли они, какого цвета шляпы у них на голове. Получились такие ответы.

   A: Нет.

   B: Нет.

   C: Нет.

   A: Нет.

   B: Да!

   И участница B под шквал аплодисментов правильно назвала цвета обеих шляп. Какие же?

6. В этой игре на сцене десять кандидатов, они могут свободно передвигаться и смотреть на шляпы других. Когда все головные уборы распределены и загорается свет, ведущая объявляет, что по крайней мере двое из них носят черные шляпы, у остальных — красные. Тот, кто думает, что на нем черная шляпа, должен это объявить. Но все молчат.

   — Ладно, — говорит ведущая. — Я снова прошу: пусть тот из вас, кто думает, что на нем черная шляпа, объявит это! — И снова тишина в ответ.

   — Хорошо, я спрошу в третий раз: тот, кто думает, что на нем черная шляпа…

   Зрители немного занервничали, не понимая, зачем спрашивать одно и то же по нескольку раз, но когда ведущая в пятый раз повторила свой вопрос, ей ответили все игроки с черными шляпами. Сколько их было?

7. Снова играют десять человек. Сколько шляп каждого цвета — неизвестно, их надели в темной соседней комнате, где никто никого не видел. Участники играют не друг против друга, а в одной команде и должны решить общую задачу. Ведущая говорит:

   — Сейчас вы войдете в студию один за другим. Там вы должны построиться согласно цвету ваших шляп: с черными — слева, с красными — справа. — Под звуки фанфар в студию входит первая кандидатка. Ей пока легко, она просто встает в середине. Но как должны встать остальные участники, чтобы получился тот порядок, о котором говорила ведущая?

Глава 12

Народный калькулятор, *или* Универсальная машина Ту Линга

В этой истории я расскажу вам о далекой стране Магнолии, культура которой совсем не похожа на нашу. Владыка Ланг Тсунг правит своими подданными железной рукой, его власть абсолютна. Сам он живет в свое удовольствие, а его народ хотя и не голодает, но влачит жизнь довольно жалкую. Некоторые жители Магнолии слышали когда-то, что в других частях света люди носятся на самодвижущихся повозках и даже летают по воздуху. Иногда местные жители замечали в небе летающий объект, но в самой Магнолии нет электричества, современных средств связи и автотранспорта.

Небольшая каста приближенных к государю наслаждается привилегией пересекать границы страны и вступать в контакт с внешним миром. Одни при этом домой больше не возвращаются, другие рассказывают Ланг Тсунгу о жизни людей в других странах, но делают это очень осторожно — открытые разговоры в Магнолии легко могут доставить неприятности. Естественно, те же люди иногда аккуратно спрашивают, нельзя ли сделать страну немножечко более открытой для технологических новшеств. Ведь там, за рубежом, есть так называемые «телевизоры», которые показывают цветные движущиеся картинки — с их помощью можно, например, донести ежедневные обращения государя в каждый дом страны. Кроме того, можно будет показывать спектакли и музыкальные выступления, и такие нехитрые радости смогут немного подсластить жизнь трудящемуся народу. До сих пор Ланг Тсунг был резко против таких нововведений в собственной стране.

— Я не позволю выставлять себя куклой в ящике, — говорил он. — А для развлечения масс у нас уже есть комическая опера и массовые мероприятия на большой арене!

Этими массовыми мероприятиями он гордился, особенно захватывающими представлениями с картинами. При их проведении 10 000 школьников, а иногда и больше, сидели на главной трибуне и поднимали над головой картонки, из которых складывалась огромная картина, видная зрителям. Благодаря смене картонок картина постоянно изменялась. Некоторые группы школьников так наловчились, что могли показывать целые сцены; правда, для этого требовались суровые многомесячные тренировки, чтобы каждый ребенок запомнил порядок смены цветов и не сбивался с ритма при смене картонок.

Генерал Цей Тунг принадлежал к числу приближенных государя, поддерживающих важнейшие реформы, и прекрасно знал, что за свои идеи вполне мог отправиться на рудники. Особенно сильно государь противился предложению электрифицировать страну и получить возможность осваивать множество технических новинок, которые могли бы сделать жизнь людей хоть немного легче. Невидимая энергия, которая может течь по металлическим проводам, казалась Ланг Тсунгу сомнительной.

Поэтому Цей Тунгу пришла в голову мысль предложить правителю такую новую технологию, которая работает без электричества или моторов, пускай даже соответствующие электрические аппараты в других странах обладают существенно большей производительностью. Как знать, если правитель сейчас согласится с идеей Цей Тунга, то, может быть, в следующий раз его будет проще уговорить на дальнейшие технические нововведения.

Сегодня Цей Тунг был на еженедельном приеме у правителя, в ходе которого ему нужно было сообщить государю об актуальных заботах населения — в позитивном тоне, но не избегая и новостей о произошедших неурядицах. В этот раз Цей Тунг пришел не один: за дверями его дожидались немногословный мужчина лет тридцати с хорошо уложенными волосами и стайка детей лет десяти.

— Великий Ланг Тсунг, — начал Цей Тунг свой доклад после того, как все положенные по протоколу формальности были соблюдены, — сегодня я хотел бы поведать вам не о проблемах страны, а о новом изобретении, сделанном одним из умнейших сыновей нашей земли.

— Снова об этом электричестве? — проворчал Ланг Тсунг. — Ты же знаешь, что мне это не нравится.

— Нет-нет, — заверил Цей Тунг, — речь идет об изобретении, полностью согласующемся с вашей идеологией благосостояния, добытого собственными силами. В основе этой новинки лежит то культурное мероприятие, которым мы все так гордимся, — движущиеся картинки на большой арене.

Государь удивился и попытался изобразить благосклонную улыбку.

— Изобретателя зовут Ту Линг, — продолжал Цей Тунг, — он стоит за дверью с небольшой группой юных помощников и хотел бы представить вам свой народный калькулятор.

— Калькулятор? А нам это нужно? — недоверчиво спросил государь.

— Позвольте продемонстрировать вам, как это работает, и тогда примите решение, — предложил Цей Тунг.

— Ну, хорошо, — проворчал Ланг Тсунг, — у этого человека есть полчаса, потом у меня запланированы важные дела. — Вообще-то он точно не знал, что у него там в расписании дел на день, но кто-нибудь обязательно ему об этом скажет, и это, конечно, будет дело, определяющее судьбу всей страны.

Цей Тунг поспешил к двери и вскоре вернулся с изобретателем и детьми, ожидавшими снаружи. Дети несли под мышкой цветные картонки размером примерно 40 на 40 сантиметров: точно такие же, какие используются во время представлений на арене. Один мальчик носил на голове колпак, а на шее у него был свисток.

Ту Линг глубоко поклонился государю. Было хорошо видно, что изобретатель нервничал. Он никогда не был во дворце и плохо разбирался в формах придворной вежливости.

— Господин Ту Линг — учитель математики в одной из школ столицы, — объявил Цей Тунг, — и он вместе со своими учениками покажет вам свое изобретение. Дети готовились к этому представлению четыре недели!

Ланг Тсунг снисходительно улыбнулся. — Ну-ну!

По знаку Ту Линга все восемь детей построились в ряд, лицом к государю. Стало заметно, что каждый из них имел при себе три картонки: белую, серую и черную. Мальчик в колпаке и со свистком стоял крайним справа. Все дети держали перед собой белые картонки. Когда Ту Линг легонько кивнул, мальчик справа свистнул, и странное представление началось: дети передавали друг другу колпак в каком-то неочевидном порядке и иногда надевали его, причем по-разному. Когда ребенок передавал колпак, он иногда менял картонку, которую держал перед собой, а иногда не менял. Каждый раз, когда колпак возвращался к мальчику справа, тот свистел в свисток. Все это происходило с невероятной скоростью, цвета непрерывно менялись с белого на серый, с серого на черный и обратно. Наконец, все замерли — каждый ребенок держал перед собой черную табличку, кроме мальчика справа, который на протяжении всей демонстрации ни разу не поменял белую табличку.

Дети гордо смотрели на правителя, улыбаясь и явно ожидая похвалы. Но тот смог извлечь из себя только какой-то хрюкающий звук.

— И что это было? — спросил он ворчливо. — Очень однообразное представление, если я могу так выразиться. И еще я не понял, что за картинку вы хотели мне показать!

— Прости, великий Ланг Тсунг, — заговорил Ту Линг, — но мы не собирались показывать картинок. Дети — это калькулятор, и они показали, как можно считать от 1 до 255.

— Что-что? — Государь явно не понимал.

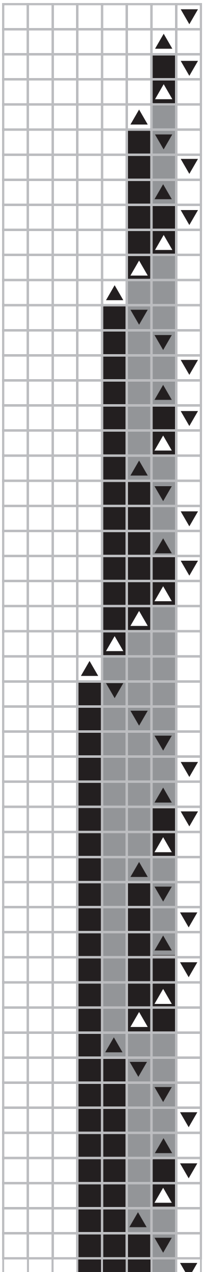
Поскольку все происходит очень быстро, — сказал Ту Линг, — у меня для вас есть рисунки с последовательностью «картинок», по крайней мере первых пятидесяти. — Он показал свиток с белыми, серыми и черными клеточками.

— И что я должен из всего этого понять? — спросил государь.

— Пока ничего, — ответил Ту Линг. — Но сейчас я вам покажу второй свиток, на котором изображены только те состояния, когда мальчик справа получает колпак и дует в свисток.

Он показал господину второй свиток, который на первый взгляд не отличался от первого. Ланг Тсунг непонимающе посмотрел на бумаги, потом на учителя математики, потом снова на бумаги. — Ты хочешь посмеяться надо мной? Или я — единственный, для кого это китайская грамота? Я терпеть не могу, когда надо мной потешаются!

Учитель побледнел от страха, он сразу представил себе отправку в исправительный лагерь из-за плохого настроения повелителя. Но Цей Тунг пришел ему на выручку: — Слышал ли когда-нибудь великий Ланг Тсунг о двоичной системе?



— Дво… какой?

— Двоичная система — это другой способ записывать числа, не такой, как мы выучили от предков. Вместо десяти цифр используются только две — ноль и один, поэтому числа становятся немного длиннее. Если принять во внимание, что серые клеточки обозначают 0, а черные — 1, то на втором свитке, как вам и сказал Ту Линг, как раз располагаются числа от 1 до 50. Но вообще дети могут считать от 1 до 255 — в двоичной системе это число 11 111 111.

— Спасибо за объяснения, но это я уже понял, — сказал повелитель, хотя голос его звучал неуверенно. — Но зачем вы мне всё это показали? Я думал, что у нас каждый десятилетний ребенок может считать до 255 безо всяких вспомогательных средств и семи помощников.

— Само собой разумеется, великий Ланг Тсунг, — ответил ему Ту Линг, снова придя в себя. — Но особенность нашей демонстрации в том, что ни один из детей в действительности не должен ни считать по порядку, ни производить вычисления. Они манипулируют своими табличками при помощи шести простых правил, когда колпак попадает к ним в руки.

Ту Линг извлек следующий свиток и хотел показать его государю, но тот сделал отстраняющий жест рукой — детали его явно не интересовали.

— Все это происходит совершенно механически, — продолжал Ту Линг, — вычисления осуществляет «машина», то есть вся группа детей. И числа — это всего лишь наиболее простая из имеющихся у нас программ.

— Программ? — усмехнулся государь. — Но в вашей развлекательной программе нет ничего развлекательного!

— Программой это называется на профессиональном языке Ту Линга, — вставил генерал.

— Мы можем, например, складывать числа, — продолжал Ту Линг, наконец-то ощутивший воодушевление и гордость за свое изобретение. — Или умножать, или делить. Или считать сумму налогов со всех подданных нашей страны.

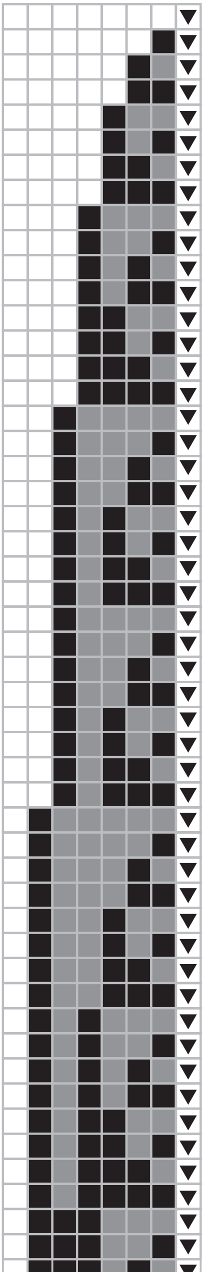
При слове «налоги» недовольное лицо государя немного повеселело.

— Да, в определенном смысле эта машина универсальна, — сказал Ту Линг. — Она может считать все, что вообще можно считать, если в достаточном количестве есть дети и время. Все зависит только от правил и начального состояния машины, то есть от набора цветов в первоначальной расстановке.

Государь уже не выглядел таким недовольным, он думал об упрощении системы сбора налогов.

— Я разговаривал с Ту Лингом о возможных применениях его машины, — сказал генерал Цей Тунг, — и они поистине безграничны. Можно, к примеру, имея достаточное количество людей, рассчитывать погоду на следующую неделю. Есть возможность использовать машину и для развлечений. Так, с помощью такого народного калькулятора можно управлять движущимися картинами на арене. Дети, которые составляют «экран», больше не должны заранее учить наизусть порядок действий — ими будет управлять группа на заднем плане, от которой они всегда вовремя получат сигнал, какую табличку надо поднять

— И мы сможем наконец-то осуществить мою мечту и представить на арене пятича-



совую сагу об истории моего правящего дома? — спросил Ланг Тсунг, который явно вошел во вкус.

— Эээ… Да, в том числе, — дипломатично ответил Цей Тунг. — Во время моих поездок в другие страны я видел, как такие машины собирают из электрических деталей — люди оказываются больше не нужны, все умещается в небольшом ящике, и каждый горожанин может иметь у себя дома персональную вычислительную машину.

— Персональные вычислительные машины, — засмеялся государь, — да кому они нужны? Я считаю, что нам на всю страну хватит пяти таких народных калькуляторов[1]. А если Вы, дорогой Цей Тунг, снова захотите использовать это как повод подсунуть мне свое электричество — выбросьте эту идею из головы. Я думаю, что народный калькулятор — это грандиозная задача для молодежи нашей страны.

И прежде чем кто-то смог прокомментировать эти слова, Ланг Тсунг отвернулся — несомненный признак того, что аудиенция окончена. Цей Тунг, Ту Линг и дети покинули зал совета. Учитель не скрывал гордости за то, что его изобретение было благосклонно принято, а генерал довольно улыбался. «Вода камень точит», думал он, Магнолия совершила первый шаг к техническому прогрессу.

Проблема разрешения

Кому-нибудь из читателей наверняка пришла в голову мысль, что прообраз Ту Линга — это на самом деле Алан Тьюринг (1912–1954), гениальный британский математик, которому в 2012 году исполнилось бы 100 лет. С его именем связывают три вещи: расшифровку кодов машины «Энигма», с помощью которой немцы в ходе Второй мировой войны кодировали секретные радиопередачи, тест Тьюринга, который должен доказать наличие у компьютера интеллекта, подобного человеческому (пока еще ни один компьютер его не прошел), и машину Тьюринга — идеали-

---

1 Ланг Тсунг не одинок в таких оценках. Глава компьютерной фирмы IBM Томас Дж. Уотсон, как говорят, в 1943 году произнес следующую фразу: «Я думаю, что всему мировому рынку нужно пять компьютеров». Правда, подтверждения этой цитате у нас нет.

зированный компьютер, который британец изобрел до того, как был действительно создан программируемый компьютер[1].

«Машина», которую Ту Линг продемонстрировал в нашей истории, представляет собой упрощенную версию машины Тьюринга; эта модель принадлежит американскому математику и предпринимателю Стивену Вольфраму. Но все же это действительно универсальная машина в том смысле, что на ней можно считать все что угодно, точно так же, как и на машине Тьюринга.

Поскольку владыка Ланг Тсунг подробно этим не заинтересовался, мы сами посмотрим повнимательнее, как машина работает. Важнейший ее элемент — колпак, который дети передают друг другу. Он обозначает место, где происходят расчеты, и имеет два состояния: вперед (положение A) и назад (положение B).

Как только колпак попадает к ребенку, надо произвести действия. Какие именно, зависит от состояния колпака и таблички, которую ребенок держит в данный момент, — белого, серого или черного цвета. Соответственно, есть шесть вариантов действий, именно эти шесть правил дети и выучили заранее.

Действие состоит в том, что ребенок меняет табличку или оставляет такой же, меняет положение колпака или оставляет его в том же самом положении и передает его налево или направо. Все правила собраны в этой табличке:

	Положение A (▼)			Положение B (▲)		
белый	белый	л	▲	черный	п	▼
серый	серый	п	▼	черный	п	▲
черный	черный	п	▼	серый	л	▲

Если, к примеру, ребенок держит серую картонку и получает колпак в положении B, то, согласно таблице, должен выполнить такие действия: взять черную картонку и передать колпак направо (если смотреть со стороны зрителя) в положении A.

---

1 Соответствующая работа Тьюринга была опубликована в 1936 году — именно тогда в Берлине Конрад Цузе начал работу над «механическим мозгом» Z1. Тьюринг узнал об этом только спустя несколько лет.

Черные поля обозначают единицы, серые — нули, а белые — «неисписанную бумагу». Вы сами можете выполнить пару шагов «счетной программы», это несложно. И вскоре вы поймете, что положение А описывает своего рода «программу вывода»: если в каком-то поле уже есть 0 или 1 и колпак попадает туда в положении А, то картонка не меняется и колпак тоже — его передают дальше направо. Это происходит до тех пор, пока колпак не попадает к крайнему справа мальчику, который вообще никогда не меняет цвет картонки. Он передает колпак налево, причем в положении В, и осуществляется следующий шаг вычислений.

Положение В — это «счетная программа»: она изменяет 0 на 1, а если там уже 1, то меняет на 0, а шляпу предписывает передать налево — это перенос в следующий разряд при счете. Если колпак в положении В попадает в незаполненное поле, оно меняет цвет на черный, то есть в это поле записывают 1. Большая часть этих манипуляций не кажется исполненными смысла, но если, как в истории, всегда смотреть только на строчки, которые получаются, когда колпак снова попадает к крайнему справа, вы увидите двоичные числа.

Собственно, такая простая программа, как счет по порядку, требует большого числа логических шагов, как мы уже видели в этой книге. И конечно, совершенно утопично представление о том, что с помощью такого «народного калькулятора» действительно можно производить все вычисления, что и на современном компьютере. Речь идет только о принципе!

Алан Тьюринг и не думал, что его «автоматическая машина», как он ее назвал, когда-нибудь будет построена[1]. Она состояла не из людей-ячеек, а из бесконечных бумажных свитков, по которым — прямо как наш колпак — туда-сюда двигались пишущая и читающая головки. Положений могло быть не два, как в нашем примере, а сколь угодно много; неограниченным был и лимит символов, которые могла написать пишущая головка. Эти символы представляли собой не только квадратики трех цветов. А еще был набор правил, который для каждого положения и каждого читаемого символа говорил пишущей головке, какой

[1] Несколько лет назад американский изобретатель Майк Дейви действительно ее построил — прекрасный образец технической мысли можно увидеть на сайте aturingmachine.com.

следующий символ ей рисовать и куда передвинуться. Важное отличие от современных счетных программ в том, что машина Тьюринга знает положение «стоп» – она останавливается, когда программа завершена. И кроме того, в работе 1936 года предполагалось, что выполнять правила должен специальный человек, в те времена таких людей называли «computer».

Работа называлась «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem», и речь в ней шла не о каких-то конкретных операциях с числами. Проблему разрешения немецкий математик Давид Гильберт включил в список нерешенных математических проблем, который предъявил своим коллегам по цеху в 1900 г. После того как стала известна теорема Гёделя о неполноте, гласившая, что не все истинные математические положения доказуемы, математики переформулировали проблему разрешимости так: можно ли по крайней мере для любого положения выяснить, доказуемо оно или нет?

Чтобы доказать сложное математическое утверждение, требуется фантазия и немного гениальности; нельзя ли предложить способ «механически» решать вопрос о доказуемости и при положительном ответе сразу предлагать доказательство? Такая постановка вопроса напоминает идею Лейбница о том, что можно «просчитать» любую проблему, любое различие мнений (см. с. 16).

Тьюринг разделял представление о существовании механического способа решения проблем и говорил: я ведь создаю машину, которая именно это и делает! Она манипулирует символами по определенным правилам. Тогда проблема разрешения сводится к вопросу: приходит ли машина Тьюринга к результату, когда в нее вводят математические формулы? Обязательно ли ее программа останавливается и выдает ответ «да» или «нет»?

Тьюринг нашел решение, и оно очень хорошо укладывается в схему парадоксальных и самореферентных положений, над которыми мы ломали головы в предыдущих главах: вопрос о разрешимости сам не является разрешимым. Применительно к машине это означает, что не существует универсальной программы, которая даст ответ на вопрос: «Когда-нибудь эта машина напечатает 0?»

Итак, Тьюринга мотивировала очень абстрактная математическая проблема. Но вместе с тем он разрабатывал (пока еще только в теории) настоящую машину, которая представляет, так сказать, идеальный суперкомпьютер, — машина Тьюринга может симулировать любую электронную вычислительную технику, только на это уйдет оооочень много времени! И наоборот: почти каждый из нас сегодня носит с собой машину Тьюринга (неполную, с ограниченным объемом памяти) в мобильном телефоне или портативном компьютере. И поэтому Алана Тьюринга можно считать провозвестником цифровой революции.

Глава 13

Оптимальный подержанный автомобиль,

или

Ясно мыслить неясными понятиями

— Вы уже думали о каком-то автомобиле? — спросил продавец подержанных машин, когда Гюнтер и Ингрид Шелль устроились в креслах офиса автопарка Шрауфа.

Гюнтер Шелль переглянулся с женой, которая сразу же взяла инициативу в свои руки. — Мой муж в этом вопросе совершенно непритязателен, — ответила супруга. — Ему нужно, чтобы автомобиль был быстрым и крутым, как он всегда выражается. От себя добавлю, что машина не должна быть слишком старой и слишком дорогой.

— Да этого все хотят! — засмеялся Петер Шрауф, владелец автосалона. — Задачи мне все еще немного неясны. Вы же видите, что у меня во дворе стоят почти 80 автомобилей. Может быть, вы бы сказали немного поточнее, что вы понимаете под «быстрым», «крутым», «старым» и «дорогим»?

— Мы дома сделали пару прикидок, — ответила Ингрид Шелль, — и у нас довольно точные представления!

— Расскажите, пожалуйста!

Господин Шелль достал листок из кармана, такие листки он часто использовал, чтобы ничего не забыть.

— Итак, начнем с цены: мы хотим потратить не более 11 000 евро. И автомобиль не должен быть старше пяти лет. На автобане он должен занимать левую полосу, т. е. предельная скорость должна быть не ниже 185 километров в час.

— Так, это я понял. А что вы подразумеваете под «крутым»?

— Хм, трудно сказать. Ауди, БМВ, мерседес, я думаю…, — сказал Гюнтер.

— Смарт — тоже мерседес! — перебила его жена.

— Это потом, — ответил продавец, — я еще не знаю, есть ли у нас что-нибудь, соответствующее вашим представлениям. Позвольте, я посмотрю в компьютере!

Некоторое время продавец стучал по клавиатуре, подолгу смотрел на монитор, а лицо его становилось все серьезнее. — Хм, это действительно не так просто!

Супруги переглянулись. — Значит, у вас нет подходящего автомобиля? — спросила Ингрид.

— Каждому покупателю — правильный автомобиль, — ответил Шрауф в рекламном стиле, — даже если поначалу задача выглядит трудной. Взгляните, здесь я отобрал шесть экземпляров, сейчас сделаю вам распечатку. Сами машины вы можете посмотреть во дворе!

— Ах, мы сначала посмотрим на список! — ответил Гюнтер.

Шрауф подошел к принтеру и через минуту вернулся с шестью листами A4, которые вручил паре.

Супруги Шелль посмотрели на информацию и фотографии. Всего в списке было шесть автомобилей:

опель, два года, 165 км/ч максимум, за 12 000 евро;

форд, восемь лет, 190 км/ч максимум, за 8 000 евро;

лада, три года, 160 км/ч максимум, за 13 000 евро;

вольво, шесть лет, 205 км/ч максимум, за 10 000 евро;

мерседес, семь лет, 210 км/ч максимум, за 9 000 евро;

смарт, нет еще и года пробега, 160 км/ч максимум,
за 12 000 евро.

Лица у обоих постепенно вытягивались, наконец Гюнтер Шелль сказал: — Но мы же объяснили вам, чего хотим. Ни одна из шести машин не удовлетворяет всем критериям: три слишком старые, три слишком медленные, три слишком дорогие. А что крутого в ладе, вы еще должны объяснить! Пойдем, Ингрид… — Гюнтер схватил свое пальто, явно собираясь уходить.

— Секундочку, — сказал Шрауф и ухватил Гюнтера за локоть. — Ни один из моих автомобилей действительно не соответствует вашим критериям на 100 процентов. Но, учитывая конкуренцию, вам вообще будет сложно найти машину, которая исполнит все ваши желания за доступную цену. У меня к вам предложение: взгляните на программу «Нечеткий автомобиль», ее написал мой сын!

— Как она называется? — заинтересовалась Ингрид.

— «Нечеткий автомобиль». Программа основана на так называемой нечеткой логике. Что-то техническое, из Америки. С тех пор как мы начали использовать эту программу, у нас купили множество машин — и еще ни один покупатель не остался недовольным!

— Ну, хорошо, — процедил Гюнтер. — Не знаю, как компьютерная программа сможет улучшить предложенные автомобили, но валяйте!

— Я позову моего сына Зерена, он сможет лучше вам все объяснить! — сказал Шрауф, нажал кнопку на телефоне, и вскоре в офисе появился молодой человек в очках. На взгляд Ингрид, ему было около 21 года.

— Позвольте представиться, — сказал юноша, — Зерен Шрауф, студент-электротехник из технического университета Аахена. Я мало имел дело с машинами, но эту маленькую программку я написал в четвертом семестре на семинаре по нечеткой логике.

— А что вообще означает здесь слово «нечеткая»? — нетерпеливо спросил Гюнтер.

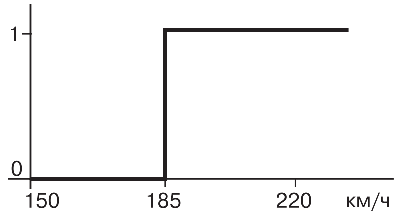
— Нечеткая логика — это логика, которая оперирует не только понятиями «истинное» и «ложное», «черное» и «белое», — ответил Зерен Шрауф. — Все начинается уже на этапе подбора понятий. Вы хотите недорогой автомобиль и говорите, что «недорогой» для вас — это не более 11 000, если больше — автомобиль слишком дорогой. Но вы действительно считаете, что 10 999 — это еще приемлемо, а 11 001 — уже нет? В реальной жизни не бывает таких четких границ!

— Я думаю, что продавец подержанных автомобилей всегда хочет вытянуть денег из покупателя больше, чем тот хочет отдать, — сомневающимся голосом сказала Ингрид Шелль.

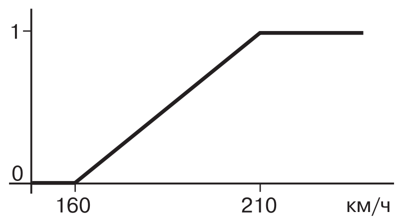
Но молодой Шрауф не дал сбить себя с толку. — То же самое с другими вашими критериями: почему вы выбрали границу в пять лет? Бывают шестилетние машины, за которыми хорошо ухаживали, они ведь вполне годятся. Нечеткая логика избегает точных границ; вместо этого у автомобиля есть каждое из желаемых свойств, но в определенной степени, которая варьируется от 0 до 1.

Заметив непонимающий взгляд супругов, он взял лист бумаги и фломастер.

— Возьмем предикат «быстрый». Вы хотите быстрый автомобиль и говорите, что максимальная скорость должна быть не ниже 185, — сказал Зерен. — Это можно проиллюстрировать следующим образом: до порогового значения в 185 для автомобиля свойству «быстрый» приписывают значение 0, а после — 1.



— В нечеткой логике переходы более плавные. Конечно, вы не назовете быстрым автомобиль, который едет медленнее 160 км/ч. А все, что движется быстрее 210 км/ч, в любом случае будет быстрым. Поэтому значение «быстрый» распределяется от 0 до 1 примерно так, — продолжил Шрауф-младший и нарисовал вторую схему.



— Вам стало понятно? Тогда вы можете сделать то же самое и с другими критериями — нарисуйте аналогичные кривые для цены и возраста. Для «крутизны» мы не можем нарисовать кривую, поэтому просто поставьте каждой марке автомобилей субъективную оценку от 0 до 1.

Он положил перед супругами несколько листов бумаги, и оба тут же принялись перешептываться и рисовать карандашами. Больше всего споров вызвал вопрос, какие машины считать крутыми, но в конце концов и здесь было выработано единое мнение.

— Большое спасибо, — сказал Шрауф после того, как собрал все листки. — Я внесу это в мою компьютерную программу и скоро покажу вам результаты, а вы пока можете просто выпить кофе!

Пока студент вводил в компьютер несколько колонок с цифрами, супруги Шелль пошли к эспрессо-автомату, продолжая обсуждать свои оценки: — Тебе не кажется, что 0,8 для смарта — это как-то многовато? — засомневался Гюнтер в выборе жены. — Ну что ты, — возражала она, — все мои подруги считают его таким милым. Я бы даже отняла у форда одну десятую и передала смарту!

Пока семейная пара развлекалась дискуссией, молодой Шрауф подошел к их столику с распечатками в руке.

— Вот, взгляните: компьютер выдал однозначный результат, и я думаю, что он вам понравится!

Супруги взяли лист бумаги, на котором увидели таблицу.

	быстрый	новый	доступный	крутой	нечеткое значение
опель	0,1	0,8	0,4	0,3	0,4
форд	0,6	0,2	0,8	0,4	0,5
лада	0	0,9	0,3	0	0,3
вольво	0,9	0,4	0,6	0,7	0,65
мерседес	1	0,3	0,7	0,8	0,7
смарт	0	1	0,4	0,8	0,55

— Наверное, я должен немного пояснить, — сказал Шрауф. — Программа так распределила значения отдельных категорий, как вы их до этого указали. А затем мой нечеткий алгоритм рассчитал нечеткое значение автомобиля для каждой отдельной машины.

Гюнтер присмотрелся к колонке чисел. — Если я правильно понимаю, то вы просто вывели среднее арифметическое значение для каждой строки?

— Да, именно так и работает нечеткий алгоритм.

— Хм. Значит, программа советует нам мерседес? — спросила Ингрид, которую больше порадовал бы смарт.

— Очень близко с вольво, — сказал Шрауф. — И к тому же вы видите, что дело не в том, чтобы выудить у вас еще денег, — на вольво мы могли бы больше заработать! Оба автомобиля удовлетворяют трем из четырех ваших первоначальных условий и только чуть-чуть постарше, чем вам бы хотелось. А для верхних строчек списка все ясно.

Супруги Шелль переглянулись. Они еще не могли так просто смириться с мыслью, что компьютерная программа выбрала за них наиболее подходящий автомобиль.

— Красиво и удобно, — сказал Гюнтер Шелль. — Ваша нечеткая система выше всяких похвал, но, может быть, мы могли бы сейчас посмотреть на сами машины?

— Конечно, — засмеялся Зерен Шрауф, — но для этого я снова передам вас своему отцу — он ведь продает машины лучше, чем я!

По взгляду отца юноша понял, что тот не был так сильно в этом уверен.

Прочь от черно-белого мышления

Логика, которой мы занимались в предыдущих главах, была строго «двузначной» — предложение было либо вполне истинным, либо вполне ложным. Для многих областей повседневной жизни такой подход себя оправдывает. Возьмем, к примеру, классический силлогизм: «Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен». Существо или смертно, или нет. Сократ — либо человек, либо нет. Истинное или ложное, черное или белое — здесь нет серого цвета.

Но в других случаях наш язык не проводит столь строгих границ. Как вам, например, такой способ размышлений?

Красные помидоры — спелые.

Эти томаты достаточно красные.

Значит, они достаточно спелые.

Такие выводы мы делаем каждый раз, когда стоим в отделе овощей в супермаркете. А вот еще один образчик.

Большинство итальянцев — темноволосые.

У большинства темноволосых людей карие глаза.

Значит, у большинства итальянцев карие глаза.

Здесь уже можно всерьез задуматься, ведь есть много светловолосых итальянцев или темноволосых людей с голубыми глазами. Можно ли как-нибудь формализовать эти интуитивные способы логического вывода? Или по-другому: чего стоит логика, которой не интересны такие неясные суждения?

Уже американский логик Чарльз Сандерс Пирс (1839–1914) сравнил классическую логику с классической физикой, в которой тела движутся бесконечно и прямолинейно, если на них не действуют никакие силы. Такие законы позволяют рассчитывать движение светил, но не автомобиля, который из-за действующих сил трения постоянно останавливается. «В мире логики мы можем с тем же успехом пренебречь неопределенностью, как и в механике силой трения», писал Пирс.

Последние сто лет предпринимались многочисленные попытки увести логику от черно-белого мышления к оттенкам серого. Польский математик Ян Лукасевич (1878–1956) в 20-е годы прошлого столетия развивал многозначную логику. Степень истинности положения могла варьироваться в диапазоне от 0 до 1. В 60-е годы калифорнийский математик Лотфи Заде (родился в 1921 году) ввел термин «fuzzy logic» (нечеткая логика). Эта разновидность логики имела особенность: она была построена на теории нечетких множеств.

В предыдущих главах мы уже проследили связь между теорией множеств и логикой. Каждое множество задает логическое высказывание о свойстве, которое описывает данное множество. И наоборот — по крайней мере в большинстве случаев, за исключением совсем фатальных, — логическое высказывание о свойстве задает множество всех вещей, обладающих этим свойством.

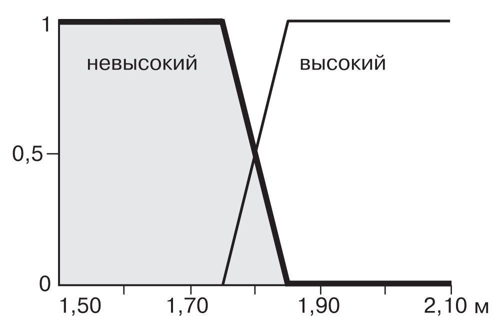
Заде исходил из наблюдения, что большинство терминов, которые мы используем в повседневной речи, нечеткие. Это легко понять, если представить себе ситуацию, когда мы называем человека «высоким», но не можем указать точную границу. Если мы скажем, что «высокий» — это 1,80 м, то нам придется абсурдно утверждать, что один человек ростом 179,9 см невысок, а другой, на пару миллиметров выше, уже высокий. По крайней мере по утрам, поскольку к вечеру каждый человек немного уменьшается в росте. Нет, мы так не рассуждаем. Есть люди, без сомнения, высокие, и есть люди, которые однозначно такими не являются, но для определенного диапазона, скажем, от 1,75 м до 1,85 м, мы либо стараемся совсем не использовать слово «высокий», либо говорим «вроде высокий» или «более-менее высокий».

Заде не определял принадлежность к множеству абсолютно, а допускал градации от 0 (вещь определенно не принадлежит множеству) до 1 (вещь однозначно принадлежит множеству). Вместо строгих границ кругов, очерчивающих множества, появились нечеткие серые переходы. Математически принадлежность к множеству определяется через функцию, как это сделал молодой Шрауф из нашей истории с понятием «быстрый».

Можно ли обращаться с такими нечеткими множествами так же, как с обычными? Можно ли строить к ним дополнения с помощью оператора НЕ? Можно ли нечеткие множества объединять посредством ИЛИ-связи и образовывать пересечения множеств через И-связь? Это не так просто, как с классическими множествами и классической логикой.

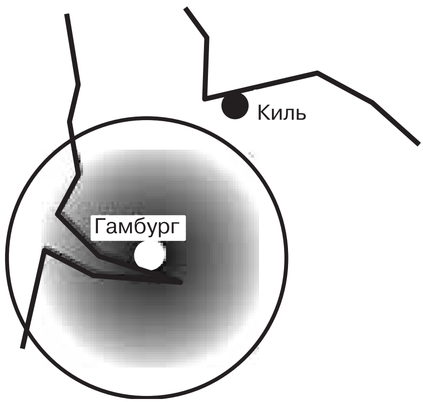
Самой простой операцией является отрицание. Если, к примеру, атрибут «высокий» выразить как функцию, то можно определить и термин «невысокий» при помощи вычитания из 1 значения «высокий»:

невысокий $(x) = 1 -$ высокий (x).

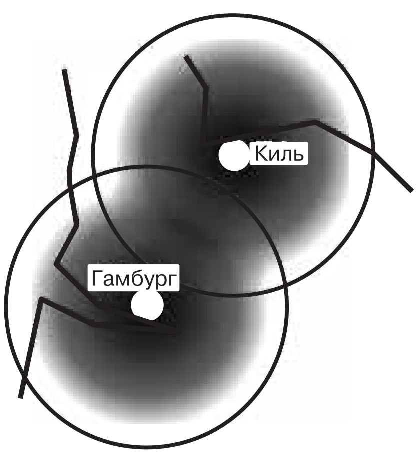


Некоторые «истины» классической логики при этом сохраняются, в частности НЕ «невысокий» — то же самое, что «высокий». Но закон противоречия, согласно которому вещь либо является высокой, либо не является, в нечеткой логике исчезает: человек 1,80 м ростом, согласно верхней кривой, в той же мере 0,5 высокий, что и невысокий.

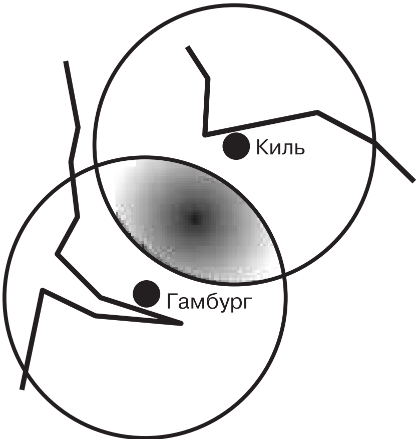
А что происходит в нечеткой логике со связью «И»? Приведу пример: что значит «жить недалеко от Гамбурга»? Это свойство — типичный кандидат на нечеткое определение. Мы можем определить это понятие таким образом, что каждый живущий в радиусе 20 км от города на 100 процентов ему соответствует, а каждый проживающий дальше, чем в 80 км, ни в коем случае не подходит. Между 20 и 80 километрами надо линейно распределить значения от 1 до 0. Вместо кривой это свойство можно изобразить это рисунком, где «недалеко от Гамбурга» будет отмечено оттенками серого.



Мы можем объединить районы вокруг Гамбурга и Киля и образовать множество всех мест, которые находятся недалеко от Гамбурга ИЛИ недалеко от Киля.



Также мы можем определить область общих значений и найти все места, которые одновременно находятся недалеко от Гамбурга И недалеко от Киля.



На этом небольшом участке между Гамбургом и Килем нет ни одного по-настоящему черного места, поскольку ни одно из мест в действительности не лежит поблизости от обоих городов.

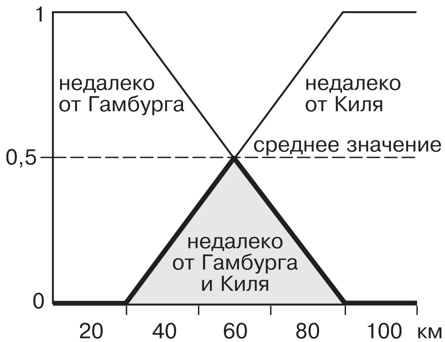
Как нечеткое свойство можно выразить строго математически? Для этого есть несколько способов. В рассказанной выше истории сын продавца автомобилей использовал среднее арифметическое значений, чтобы найти машину, которая является И быстрой, И доступной по цене, И не старой, И крутой. На практике для И-связи чаще берут наименьшее значение. Если $N_H(x)$ обозначает степень удаленности от Гамбурга, а $N_K(x)$ — от Киля, то

$$N_{H \wedge K}(x) = \min(N_H(x), N_K(x)).$$

Посмотрите на отрезок между Гамбургом и Килем в разных точках. Им соответствуют различные значения удаленности от Гамбурга (для простоты мы считаем, что расстояние от Гамбурга до Киля составляет 100 километров).

Конечно, прежде всего именно те, чьи дома в середине отрезка, могут наслаждаться тем преимуществом жизни в сельской местности, что они находятся недалеко *как* от Гамбурга, *так и* от Киля. При этом среднее значение для всего отрезка остается постоянным.

Если бы сын продавца автомобилей применил принцип наименьшего значения, то выбор пал бы на вольво. Наихудшей оцен-



ки удостоился здесь возраст машины — 0,4, а мерседес получил только 0,3. Но такой способ построения продавцу не подошел, поскольку три других параметра в этом случае полностью проигнорированы.

Пример показывает, что в нечеткой логике нет однозначного определения логических операторов И и ИЛИ, наша повседневная интуиция справляется здесь гораздо лучше. Об импликации (из А следует В), которая в классической логике доставляет так много проблем, лучше вообще промолчать.

Есть еще несколько причин, по которым нечеткая логика никогда по-настоящему не находила много сторонников среди логиков-теоретиков: здесь нельзя работать с истинностными таблицами и нельзя создать универсальные правила логического вывода. Ведь сила классической логики именно в том, что ее выводы кристально чисты и независимы от содержания положений. Нечеткая логика для этого не подходит — она всегда контекстуальна. Взгляните еще раз на пример с итальянцами и карими глазами.

Большинство итальянцев — темноволосые.

У большинства темноволосых людей карие глаза.

Значит, у большинства итальянцев карие глаза.

Это еще может хоть как-то соответствовать действительности, но подставьте в эту схему другие положения и вы получите абсурдный вывод.

Большинство жителей Берлина — немцы.

Большинство немцев живет западнее Эльбы.

Следовательно, большинство жителей Берлина живет западнее Эльбы.

К сожалению, нечеткие понятия ведут к нечетким, а иногда и вовсе к ложным, положениям. Вместо положений часто возникают только предположения, которые при более детальном рассмотрении оказываются ложными.

Нечеткая логика осталась бы совершенно неизвестной, если бы не нашла прикладного применения в управлении механическими процессами. Там с ее помощью можно копировать тот «эвристический» метод, с помощью которого люди осуществляют определенную деятельность. Возьмем, к примеру, крановщика, который должен с помощью крана перенести груз с корабля в грузовик. При этом нужно постараться избежать раскачивания груза и в то же время переместить его быстро. Для этого, разумеется, есть физические уравнения, но крановщику они неизвестны. Кроме того, он не знает и точной скорости движения стрелы крана и значения угла наклона груза. Тем не менее крановщик после нескольких лет работы опытным путем вырабатывает правила, которые ему вроде как неизвестны, но он им автоматически следует. «Если груз немного повернется направо, то я слегка подвину кран в том же направлении» — этот пример нечеткого правила описывает способ, которым человек управляет краном.

Классическое машинное управление, которое должно прийти к приблизительно такому же результату, всегда нуждается в четком физическом описании ситуации. Нечеткое управление превращает неточные, на пальцах высчитанные человеческие правила в четкие указания даже тогда, когда техническую систему не удается полностью описать математически. Это делается в три шага[1].

1. Точные входные данные, полученные от машинных сенсоров, делают нечеткими, то есть переводят на язык нечетких терминов — точное значение скорости в нечетком варианте превращается в «медленно», «со средней скоростью» и «очень быстро».

[1] Эти системы управления и другие интересные вещи о нечеткой логике я описал много лет назад в книге «Fuzzy Logic — Methodische Einführung in krauses Denken», которая вышла в издательстве Rowohlt Taschenbuch Verlag. К сожалению, эта книга уже стала библиографической редкостью.

2. Полная формулировка нечетких правил, как и предложенная выше, применяется аналогичным способом. Каждое из правил приводит к нечетким данным на выходе, например: «Слегка поддать газу!».
3. Из этих нечетких, иногда даже противоречащих друг другу результатов надо снова рассчитать точное итоговое значение (или несколько), с которым машина может что-то начать делать — этот шаг называется «дефаззификацией».

Прелесть в том, что можно относительно быстро создать систему управления процессами, не вникая во все их детали, — точно так же, как человек поступает с окружающим миром, когда не знает физических законов.

Эйфория, которой поддались многие технические специалисты в 90-х годах, затихла; сегодня нечеткая логика — это только одно из многих средств, которые применяют в автоматическом регулировании. Многословная философская надстройка, воздвигнутая теоретиками нечеткой логики, осталась лишь заметкой на полях и не оказала серьезного воздействия на большинство информатиков и математиков.

Защитники нечеткой логики постоянно заявляли классическим логикам, что их черно-белое мышление полностью действительность не отражает. В первой главе я упоминал идею Лейбница о том, чтобы люди перестали спорить, а во время диспута только производили вычисления. Но эта идея разбивается о неточность человеческого языка. «Невыполнимое требование точного использования языка в разговоре редуцирует сам этот разговор к простому обмену информацией», писал теоретик нечеткой логики Бернд Деман в 1993 году, «и ведет к бесконечному спору о применении понятий, если, конечно, разговор до этого не иссяк в голой пустыне смысла».

В этом автор явно прав. Нечеткая логика не создала всеобщей теории нечеткости. В конце концов, это большая удача, что мы используем логику как бритвенно острый инструмент, с помощью которого можно анализировать различные ходы мысли, предлагать доказательства и их опровержения — и замечательно, что в нашей жизни еще хватает вещей, которые никогда такой логике не будут доступны.

Инструменты мышления,

или

Важнейшие логические формулы

Логика высказываний

Еще во второй главе я упомянул, что все исчисление высказываний можно вывести из *одного-единственного* оператора (НЕ И) и *одного-единственного* правила вывода (утверждающий модус). На практике так происходит нечасто. Для настоящих логических доказательств используется целый ряд эквивалентностей и правил.

Еще раз напомню: логические операторы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ объяснены в истинностных таблицах главы 2. О том, что такое логический вывод, рассказывается в главе 3: из посылок слева от двоеточия можно вывести высказывание после двоеточия посредством применения нескольких правил. Если связь двусторонняя, то обе части эквивалентны, и мы пишем два двоеточия (::).

Итак, вот список нужнейших правил, которые можно применять для логического доказательства.

Эквивалентности

Двойное отрицание: $A :: \neg(\neg A)$.

Замена: $A \wedge B :: B \wedge A$; $\quad A \vee B :: B \vee A$.

Ассоциативный закон: $A \wedge (B \wedge C) :: (A \wedge B) \wedge C$;

$A \vee (B \vee C) :: (A \vee B) \vee C$.

Дистрибутивный закон: $A \wedge (B \vee C) :: (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

$A \vee (B \wedge C) :: (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

В отличие от арифметики со сложением и умножениенм чисел в логике возможны оба варианта применения правила!

Контрапозиция: $A \rightarrow B :: \neg B \rightarrow \neg A$.

Импликация: $A \rightarrow B :: \neg A \vee B$.

Экспортация: $A \rightarrow (B \rightarrow C) :: (A \wedge B) \rightarrow C$.

Правила де Моргана: $\neg(A \wedge B) :: \neg A \vee \neg B$; $\neg(A \vee B) :: \neg A \wedge \neg B$.

Тавтология: $A \wedge A :: A$; $A \vee A :: A$.

Эквивалентность: $A \leftrightarrow B :: (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;

$A \leftrightarrow B :: (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Правила логического вывода

Утверждающий модус: $A \rightarrow B, A : B$.

Отрицающий модус: $A \rightarrow B, \neg B : \neg A$.

Конъюнкция: $A, B : A \wedge B$.

Упрощение: $A \wedge B : A$; $A \wedge B : B$.

Сложение: A: $A \vee B$.

Дизъюнктивный силлогизм: $A \vee B, \neg A : B$.

Гипотетический силлогизм: $A \rightarrow B, B \rightarrow C : A \rightarrow C$.

Конструктивная дилемма: $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D : C \vee D$.

Логика предикатов

В логике предикатов используются те же правила вывода и эквивалентности, что и в логике высказываний, — ведь предикат Px тоже является высказыванием. Новые правила возникают только при использовании кванторов:

Отрицание кванторов:

$\forall x\ (Px) :: \neg\exists x\ (\neg Px)$; $\neg\forall x\ (Px) :: \exists x\ (\neg Px)$;

$\exists x\ (Px) :: \neg\forall x(\neg Px)$; $\neg\exists x\ (Px) :: \forall x(\neg Px)$.

Дистрибутивный закон для кванторов:

$$\forall x\ (Px \wedge Qx) :: \forall x\ (Px) \wedge \forall x\ (Qx);$$

$$\exists x\ (Px \vee Qx) :: \exists x\ (Px) \vee \exists x\ (Qx).$$

Обратите внимание: здесь работают только комбинации квантора всеобщности с И и квантора существования с ИЛИ. Другие варианты не употребляются, например, из фразы «Все люди — или мужчины, или женщины» нельзя сделать вывод «все люди — мужчины или все люди — женщины»!

Перестановка кванторов: $\forall x\ (\forall y\ (Pxy)) :: \forall y\ (\forall x\ (Pxy))$;

$\exists x\ (\exists y\ (Pxy)) :: \exists y\ (\exists x\ (Pxy))$.

Внимание: можно переставлять только кванторы одного вида без продолжений, иначе получится логическая бессмыслица!

Наконец, есть еще четыре правила обращения с кванторами.

Универсальная конкретизация: $\forall x\ (Px) : Pa$.

Если высказывание справедливо для всех x, то оно справедливо и для каждого конкретного a.

Экзистенциальная генерализация: $Pa : \exists x\ (Px)$.

Если высказывание справедливо для конкретного a, то верно и соответствующее высказывание с квантором существования «есть такой x».

Экзистенциальная конкретизация: $\exists x\ (Px) : Px$.

Если высказывание с квантором существования справедливо, то можно использовать соответствующее высказывание с переменной x. Кроме того, нужно быть чертовски внимательным, чтобы не смешать эту переменную с другими.

Универсальная генерализация: $Px : \forall x\ (Px)$

Это обобщение в целом ложно, оно работает только при очень строгих требованиях к переменной x.

Аксиомы теории множеств Цермело–Френкеля

С появлением антиномии Бертрана Рассела стало понятно, что в математике нельзя «наивно» образовывать множества, этот процесс необходимо ограничить строгими правилами. На этой почве возникли различные системы аксиом, пытающиеся преодолеть такие антиномии. Теория множеств Цермело–Френкеля, названная в честь Эрнста Цермело (1871–1953) и Абрахама Френкеля (1891–1965), сегодня является наиболее употребительной. В ней пока не нашли никаких антиномий, с другой стороны, становится ясно, что ее непротиворечивость никогда не докажут.

Некоторым аксиомы могут показаться очень абстрактными или очевидными, но поскольку они служат основанием современной математики, но при этом едва известны самим математикам, я хочу перечислить их здесь полностью.

Аксиома объемности: $\forall x\ \forall y\ (x = y \leftrightarrow \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y))$.

Эта аксиома гласит, что множества определены входящими в них элементами — если каждый элемент множества x также входит в y, или наоборот, то x — то же самое, что y.

Аксиома пустого множества: $\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$.

Есть множество x, которое не содержит ни одного элемента.

Аксиома пары: $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u\ (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$.

Из двух объектов x и y всегда можно образовать множество $\{x,y\}$, которое содержит именно эти два объекта.

Аксиома объединения: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists w\ (w \in x \wedge z \in w))$.

Здесь относительно сложно записано следующее: можно для множества x создать множество y, которое состоит из элементов элементов x. Значит, если x включает множества в качестве элементов, то элементы всех этих множеств объединяются в новое множество y.

Схема выделения: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge Fz)$.

Если F — логический предикат, то можно для каждого множества x образовать подмножество y элементов x, которые обладают свойством F.

Аксиома бесконечности: $\exists x\ (\varnothing \in x \wedge \forall y\ (y \in x \rightarrow \{y\} \in x))$.

Эта аксиома обеспечивает возможность создания множеств следующего вида:

$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\} \ldots\}$.

В частности, это означает, что есть множества с бесконечно большим числом элементов.

Аксиома множества подмножеств: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.

Можно образовать множество y всех подмножеств множества x. Это множество, кстати, всегда «больше», чем само множество, то есть нельзя установить взаимно однозначное соответствие между элементами x и y.

Аксиома замены:

$(\forall a\ (a \in x \rightarrow \exists! b\ (Fab))) \rightarrow (\exists y\ \forall b\ (b \in y \leftrightarrow Fab))$.

Очень сложное выражение, которое описывает очень простое требование: если имеется двуместный логический предикат, то для каждого элемента a из множества x имеется точно один элемент b такой, что Fab (другими словами, функция, которая каждому элементу a ставит в соответствие элемент b), и все эти элементы b образуют множество y. Иначе говоря, образ множества x для функции F тоже будет множеством.

Аксиома регулярности:

$\forall x\ (x \neq \varnothing \rightarrow \exists y\ ((y \in x) \wedge (x \cap y = \varnothing)))$.

Эту аксиому мы уже объясняли в гл. 8 — она исправляет противоречивую «аксиому включения» Фреге и гласит, что каждое непустое множество x содержит элемент y, который не имеет с x ни одного общего элемента. Это ведет к тому, что множества не могут включать сами себя в качестве элемента; аксиома запрещает бесконечно уменьшающиеся цепочки множеств, в которых последующее множество постоянно оказывается элементом предыдущего. Бесконечно увеличивающиеся цепочки, наоборот, разрешены.

Аксиома выбора:

$(\forall u\ \forall v\ ((u \in x \wedge v \in x) \rightarrow (u \neq v \rightarrow u \cap v = \varnothing) \wedge u \neq \varnothing)) \rightarrow$

$\exists y\ \forall z\ (z \in x \rightarrow \exists! w\ (w \in z \wedge w \in y))$.

Здесь левая часть объясняет, как должно выглядеть множество x, о котором здесь сделано высказывание. Оно не содержит пустое множество в качестве элемента, и все его элементы — множества, не пересекающиеся друг с другом. Тогда можно образовать множество y, которое содержит ровно по одному элементу w из каждого множества z, принадлежащего x. Аксиома только говорит, что такое множество y существует, как его можно образовать, она не объясняет.

Эта аксиома заставила помучиться многих математиков — она не воспринимается как аксиома, поскольку представляет собой очень специфическое высказывание, однако же можно показать, что она не выводится из других аксиом Цермело–Френкеля. Поэтому одни используют аксиоматику Цермело–Френкеля без аксиомы выбора (ZF), а другие — с этой аксиомой (ZFC), которая облегчает многие доказательства.

Решения

Страница 52

Норвежец пьет воду, а зебра живет у японца.

Особенности распределены следующим образом:

Дом	1	2	3	4	5
Цвет	желтый	синий	красный	белый	зеленый
Националь-ность	норвежец	украинец	англичанин	испанец	японец
Напиток	вода	чай	молоко	апельси-новый сок	кофе
Сигареты	Kools	Chesterfield	Old Gold	Lucky Strike	Parliament
Животное	лиса	лошадь	улитки	собака	зебра

Страница 68

Возможно, наши внуки уже не смогут понять смысл этого решения — оно базируется на том, что лампочки (в том числе энергосберегающие) производят не только свет, но и тепло. Сначала вы щелкаете выключателем 1. Через пару минут выключаете его, нажимаете на выключатель 2 и идете в подвал. Если лампочка горит, то искомый выключатель — 2. Если не горит, но теплая, — работал выключатель 1. Если не горит и холодная — однозначно выключатель 3.

Страница 82

Еще раз перечислим условия:

1. Ни одна акула не сомневается в том, что она хорошо вооружена.
2. Рыба, которая не умеет танцевать кадриль, заслуживает сострадания.
3. Ни одна рыба не чувствует себя вооруженной, если у нее нет по меньшей мере трех рядов зубов.
4. Все рыбы, за исключением акул, ласковы с детьми.

5. Крупные рыбы не умеют танцевать кадриль.
6. Рыбы с зубами в три ряда не заслуживают сострадания.

Исходя из этих посылок докажите следующее предложение: «Все крупные рыбы ласковы с детьми».

Для начала нам надо было бы ввести такой предикат, который обозначает, что x есть рыба. Но поскольку все высказывания в этом задании касаются рыб, можно сэкономить, с самого начала ограничив область возможных объектов множеством всех рыб. Это помогает избежать кучи формальностей!

Теперь можно определить следующие предикаты:

Hx: «x есть акула»;

Wx: «x умеет танцевать кадриль»;

Mx: «x заслуживает сострадания»;

Kx: «x ласкова с детьми»;

Bx: «x чувствует себя хорошо вооруженной»;

Zx: «x имеет минимум три ряда зубов»;

Sx: «x крупная».

Даны следующие исходные посылки:

1. $\neg\exists x\ (Hx \wedge \neg Bx)$.
2. $\forall x\ (\neg Wx \rightarrow Mx)$.
3. $\neg\exists x\ (Bx \wedge \neg Zx)$.
4. $\forall x\ (\neg Hx \rightarrow Kx)$.
5. $\forall x\ (Sx \rightarrow \neg Wx)$.
6. $\forall x\ (Zx \rightarrow \neg Mx)$.

Вопрос в том, следует ли из этих шести посылок вывод

$\forall x\ (Sx \rightarrow Kx)$.

Прежде чем приступить к доказательству, уберем некрасивые отрицания квантора существования из формул 1 и 3 по правилам отрицания кванторов (все правила преобразования вы найдете в приложении «Инструменты мышления»):

1′. $\forall x\ (\neg Hx \vee Bx)$ (1 QN).

3′. $\forall x\ (\neg Bx \wedge Zx)$ (2 QN).

Похоже, что к этим формулам можно применить правило импликации и преобразовать их в операцию ЕСЛИ …, ТО:

$1''$. $\forall x\ (Hx \to Bx)$ ($1'$ impl).

$3''$. $\forall x\ (Bx \to Zx)$ (3’ impl).

Теперь у нас есть шесть правил ЕСЛИ…, ТО, которые можно связать в замечательную цепочку посредством утверждающего модуса.

В качестве формы доказательства в этот раз мы выберем доказательство от противного. В рамках этого метода утверждение не выводят из исходных посылок, а принимают за ложное и приходят к противоречию. Отрицание нашего утверждения мы добавим к посылкам и немного преобразуем:

7. $\neg\forall x\ (Sx \to Kx)$.

$7'$. $\exists x\ (\neg(Sx \to Kx))$ (7 QN).

$7''$. $\exists x\ (\neg(Kx \lor \neg Sx))$ ($7'$ impl).

$7'''$. $\exists x\ (\neg Kx \land Sx))$ ($7''$ DM).

Это высказывание означает: есть крупная рыба, которая не ласкова с детьми. Эту рыбу мы обозначим f. Тогда

8. $\neg Kf$.

9. Sf.

Поскольку мы преобразовали все наши посылки в высказывания с квантором общности, они относятся и к f. Значит, мы можем убрать квантор, а соответствующие высказывания для f поставить в скобки. Тогда мы можем применить утверждающий модус:

10. $\neg Wf$ (5, 9 impl).

11. Mf (2, 10 MP).

Это была цепочка следствий из Sf. А что можно вывести из $\neg Kf$? Пока ничего, но можно соответствующим образом преобразовать высказывание 4:

$4'$. $\forall x\ (\neg Kx \to Hx)$ (4 contra).

Теперь мы можем заключить:

12. Hf ($4'$, 8 MP).

13. Bf ($1''$, 12 MP).

14. Zf ($3''$, 13 MP).

15, $\neg Mf$ (6, 14 MP).

В строке 11 значится, что f заслуживает сострадания, а в строке 15 — что нет. Значит, мы из исходных посылок и допущения 7 вывели утверждение и его противоположность, поэтому высказывание 7 должно быть ложным (поскольку исходные посылки по определению должны быть истинными). Наше утверждение истинно — все большие рыбы действительно ласковы с детьми!

Страницы 84–86

1. Если бы островитянину можно было задать два вопроса, задача, конечно, была бы элементарной: сначала при помощи очевидного фактического вопроса выясняем, является ли он лжецом, затем спрашиваем дорогу. Фокус состоит в том, чтобы придумать один-единственный вопрос, который вынудит лжеца сказать «двойную ложь». Для этого есть несколько возможностей. Например: «Представитель другого племени сказал бы, что эта дорога ведет в столицу?» Спрашивая, показываете на одну из двух дорог. Правдоруб ответит вам «нет», если это правильная дорога, и «да», если это не так. А что скажет лжец? То же самое! Правильная дорога та, о которой островитянин скажет вам «нет».

   «Сказал бы ты полчаса назад, что эта дорога ведет в столицу?» Здесь правдоруб ответит истину, но и лжец будет вынужден в конце концов дать вам корректный ответ! Значит, Вы можете поверить полученному ответу.
2. Хотя здесь мы встречаем одного жителя острова, мы должны учитывать в своих рассуждениях, истинным или ложным является высказывание «съем свои носки». Определим предикат Bx для «x съест свои носки» и составим истинностную таблицу:

Wc	Bc	c:"$Wc \to Bc$"	согласуется?
и	и	и	да
и	л	л	нет
л	и	и	нет
л	л	и	нет

Выходит, что лжец не мог сказать такую фразу. Это следует из самого определения логической импликации, из-за которого в более ранних главах уже возникали сложности:

из ложного положения может следовать все что угодно, а все предложение при этом будет истинным. Значит, Чарли — правдоруб и поэтому действительно должен провалиться на этом самом месте.

3. Решение этой задачи тоже базируется на контринтуитивном определении логической импликации.

Wd	We	d:"$We \to \neg Wd$"	согласуется?
и	и	л	нет
и	л	и	да
л	и	и	нет
л	л	и	нет

Можно быстро прикинуть в голове, что фразу «Если…, то я — лжец» не мог сказать лжец: если вывод истинный, то этого достаточно, чтобы сделать все высказывание истинным. Значит, Денис — правдоруб, а Элен должна быть лжецом, чтобы высказывание было истинным.

4. В этот раз мы должны составить истинностную таблицу для трех жителей, то есть проверить восемь строк. Кроме того, нужно оценить два высказывания — Фрица и Джины. Прежде всего мы можем сэкономить время: для вариантов, когда высказывание Фрица не согласуется с особенностями речи жителей острова, проверять фразу Джины уже не нужно. Ее ответ не требует логического оператора, поскольку выражение «одно из трех наших высказываний истинно» довольно простое; мы запишем его как «точно один Wx».

Wf	Wg	Wh	f:"$\neg WF \wedge \neg Wg \wedge \neg Wh$"	f согласуется?	g:"точно один Wx"	g согласуется?
и	и	и	л	нет		
и	и	л	л	нет		
и	л	и	л	нет		
л	и	и	л	да	л	нет
и	л	л	л	нет		
л	и	л	л	да	и	да
л	л	и	л	да	и	нет
л	л	л	и	нет		

Если коротко: фраза Фрица не может быть истинной, поэтому он лжец в любом случае. Тогда надо проверить всего три случая.

5. Здесь надо кое-что объяснить. Во-первых, высказывание Дженни в любом случае должно быть ложным — ни один житель сам себя лжецом не назовет. Поэтому в четвертой колонке будет стоять только буква «л», и проверять надо только те случаи, в которых Дженни — лжец. Во-вторых, важно, чтобы высказывания Курта «Дженни лжет» и «Инго говорит правду» проверялись по отдельности, а не как одно предложение — иначе последняя строка согласовывалась бы с условиями! Но мы знаем, что шепелявый Инго сказал правду, а Дженни является единственным явным лжецом.

Wi	Wj	Wk	j:"i:"$\neg Wi$""	j согласуется?	k:"$\neg Wj$"	k:"Wi"	k согласуется?
и	и	и	л	нет			
и	и	л	л	нет			
и	л	и	л	да	и	и	да
л	и	и	л	нет			
и	л	л	л	да	и	и	нет
л	и	л	л	нет			
л	л	и	л	да	и	л	нет
л	л	л	л	да	и	л	нет

6. То, что x и y принадлежат к одному и тому же виду жителей, логически можно выразить формулой $Wx \leftrightarrow Wy$. Мы рассматриваем только те случаи, когда ответ Лолы согласуется, и рассуждаем так: Лола и Мими одинаковы? А как тогда должен выглядеть согласующийся с этим ответ Нины?

Wl	Wm	Wn	l:"$Wm \leftrightarrow Wn$"	l согласуется?	$Wl \leftrightarrow Wm$	n согласуется?
и	и	и	и	да	и	да
и	и	л	л	нет		
и	л	и	л	нет		
л	и	и	и	нет		
и	л	л	и	да	л	да
л	и	л	л	да	л	да
л	л	и	л	да	и	да

Самое замечательное в этой загадке: мы знаем, что Нина нам ответит, но не можем с этим ответом ничего сделать — ни узнать, к какому виду принадлежат эти трое, ни проверить правильность ответа.

7. Число лжецов находится в интервале от 1 до 100, и только тот житель Мендачино, который его назвал, является правдорубом. Значит, на острове 99 лжецов, а правильный ответ дал предпоследний житель.
8. Если x — это число лжецов, то островитяне с номерами от 1 до x сказали правду, а островитяне с номерами от $(x+1)$ до 100 солгали. Но это $(100-x)$ жителей. Поэтому $x = 100 - x$. Это означает, что ровно 50 мендачинцев — лжецы, а 50 — правдорубы.

Страница 133

Кто написал табличку на третьей двери? Предположим, что Франц. Тогда надпись лжет, и Франц написал максимум одну табличку — собственно третью. Две другие надписи в этом случае принадлежат Хансу, но этого не может быть, поскольку приз спрятан только за одной из дверей. Значит, табличку номер 3 написал Ханс, и на ней — правда. Тогда две других надписи сделал Франц, и гриля нет ни за первой, ни за второй дверью. Его спрятали за третьей.

Страницы 135–137

2. Кандидаты А, В и С стоят друг за другом, как в задаче 1, D стоит за занавесом. Если бы у В и С были одинаковые шляпы, то А тотчас бы узнал свой цвет, поскольку было роздано по две шляпы каждого цвета. Но поскольку прошло «некоторое время», у В и С шляпы все-таки разные. Значит, после паузы В мог сказать, что у него красная шляпа, если у С — черная, или наоборот.

(Стоящий за кулисами D вообще никак не связан с результатом игры — можно было бы организовать эту игру так же, как и первую, раздав А, В и С три из четырех шляп: двух красных и двух черных.)

3. Каждый из трех претендентов думает: «Я вижу две красные шляпы, а моя — красная или черная. Если бы она была черной, то двое других подумали бы: «Я вижу красную и черную шляпы. Была бы моя шляпа черной, соперник с красной шляпой видел бы две черные шляпы и поднял бы руку, сообщив, что его шляпа — красная». Тогда он закричал бы: «У меня красная шляпа!» Но этого не произошло, значит, моя шляпа — *не* черная, а красная». И кричит: «У меня красная шляпа!» Поскольку все участники одинаково хитры и дважды выдерживали паузу, к своему решению они пришли одновременно.

4. «Фишка» решения — в замечании, что игра должна быть честной: значит, у все троих должны быть равные шансы определить цвет своей шляпы. Какие варианты распределения головных уборов вообще возможны? Естественно, двух красных и одной черной шляп быть не может — владелец черной немедленно поймет цвет.

А могут ли быть две черные и одна красная шляпы? Тогда у черных преимущество: они ведь видят черную и красную шляпы. Если бы у кого-то из них была красная шляпа, то это было бы тем самым несправедливым распределением «красная-красная-черная». Значит, они могут определить цвет своей шляпы и поэтому имеют преимущество перед третьим игроком.

Из этого следует, что честной является только раздача трех черных шляп. Для всех этих рассуждений не нужно ждать, когда включат свет, — поэтому все трое одновременно пришли к правильному решению.

5. Мы последуем за ходом рассуждений B, когда вопрос был задан во второй раз. «Предположим, у меня на голове две красные шляпы. Тогда A на втором вопросе подумал: "У B — две красные шляпы. Если бы у меня тоже были две красные шляпы, тогда C видел бы четыре шляпы и точно знал бы, что у него самого две черные. Но C ничего не сделал, значит, у меня не две красные шляпы. А могут быть две черные? Тогда C мог бы понять, что у него на голове ни две красные, ни две черные шляпы, потому что иначе уже от него B или я узнали бы цвет своих шляп. Значит, у меня не две красные и не две черные шляпы, а красная и черная." Но B этого не сказал, значит, у меня не две красных шляпы.

По этой же причине у меня не может быть и двух черных шляп. Значит, мои шляпы — красная и черная!»

Какие шляпы у остальных, мы с уверенностью сказать не можем!

С помощью метааргумента задачку можно решить еще быстрее: все условия симметричны и не искажаюся, если поменять местами черное и красное. Поэтому наше решение должно быть верным, если заменить красные шляпы на черные, и наоборот. А это возможно только в том случае, если на голове у В шляпы разных цветов.

6. Здесь ведущая предоставила время на размышления, ведь владельцам черных шляп действительно нужно неоднократно ждать, прежде чем они точно удостоверятся в цвете своих шляп.

Предположим, что имеется минимум черных шляп, то есть две. Тогда оба их владельца видят одну черную и восемь белых шляп и думают: у меня черная шляпа! Но никто ничего не сказал, когда ведущая задала вопрос.

Значит, черных шляп минимум три. Ход рассуждений воспроизводится снова. Если бы кто-то увидел две черные шляпы, он бы поднял руку после второго вопроса ведущей. Но ничего этого не произошло, значит черных шляп минимум четыре. И это выяснилось бы на третьем вопросе ведущей. И так далее… Когда ведущая спросила в пятый раз, руку подняли те, кто видел пять черных шляп — их было ровно шестеро.

7. Второй вошедший видит шляпу первой участницы. Если шляпа черная, он встает *справа*, если красная — *слева*. Все следующие участники действуют точно так же, если видят на сцене шляпы только одного цвета. Когда цветов станет два, каждый новоприбывший встает между обладателями красных и черных шляп. Таким образом, красные и черные шляпы всегда расположены в правильном порядке: черные стоят слева, красные — справа.

Литература и источники

Основополагающие работы, расположенные по степени сложности

Введение в логику, в форме комикса рассказывающее биографию Бертрана Рассела: Apostolos Doxiadis, Christos H. Papdimitrou: *Logicomix — Eine epische Suche nach Wahrheit*; Atrium-Verlag, 2010

Основы логического вывода с многочисленными примерами доказательств: Die Grundlagen des logischen Schließens, mit vielen Beweis-Beispielen: Mark Zegarelli: *Logik für Dummies*, Wiley VCH, 2008

Очень основательное введение в математическую логику с легко понятной исторической частью: Dirk W. Hoffman: *Grenzen der Mathematik — eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik*; Spektrum Akademischer Verlag, 2011

Задачки и головоломки

Идеи для большинства задач (которые я довольно сильно переформулировал) были взяты из Интернета и не принадлежат автору данной книги. Задачу про доктора Хауса придумал Франк Вестенфельдер (www.daf-raetsel.de). Задания из главы 6 про крокодилов, грудных детей и акул я позаимствовал из одной книжки, вышедшей еще в ГДР:

Otakar Zich, Arnošt Kolman: Unterhaltsame Logik; BSG B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1965.

Истории, происходившие на (названном мной) острове лжецов Мендачино, взяты из книги, которая содержит не только бесчисленное множество подобных задач, но и глубокие мысли о самореференции и даже занимательное изложение теоремы о неполноте Гёделя:

Raymond M. Smullyan: What Is The Name of This Book?, опубликована в 1978 году, переиздана в 2011 издательством Dover Publications. (На русском языке книга Р. Смаллиана вышла под названием «Как же называется эта книга?», последнее издание — в 2013 г., М: АСТ.)

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Научно-популярное электронное издание

Дрёссер Кристоф

**ОБОЛЬСТИТЬ ЛОГИКОЙ.
ВЫВОДЫ НА ВСЕ СЛУЧАИ ЖИЗНИ**

Ведущий редактор *Н. А. Шихова*
Обложка: *И. Е. Марев*
Художественный редактор *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Е. Н. Клитина*
Компьютерная верстка: *В. А. Носенко*

Подписано к использованию 27.01.20.
Формат 125×200 мм

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Как доказать, что Ангела Меркель – китайская императрица?
Почему порядка может быть слишком много?
Как ясно мыслить неясными понятиями?
На что способен компьютер без электрических и механических частей?
Может ли Всемогущее Существо создать камень, который нельзя поднять?

Обо всем этом и о многом другом легко и весело рассказывает в своей книге Кристоф Дрёссер, известный немецкий журналист, автор нескольких научно-популярных книг и лауреат множества премий. Перевернув последнюю страницу, читатель поймет, что логика помогает нам рассуждать и делать выводы даже в самых непростых жизненных ситуациях.